Shakil Mahmud • Research Monograph

SHAKIL MAHMUD EDITORIAL & RESEARCH MONOGRAPHS

গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন

ভন নিউম্যানের মিনিম্যাক্স ও ন্যাশ সাম্যাবস্থা থেকে সাবগেম পারফেকশন, বিবর্তনীয় কৌশল (ইএসএস), নিলাম ডিজাইন, ভিসিজি মেকানিজম এবং ক্রিপ্টোগ্রাফিক অ্যালগরিদমিক গেম থিওরির ২০ খণ্ডের এক প্রামাণ্য বুদ্ধিবৃত্তিক মহাকাব্য।

SHAKIL MAHMUD

গবেষক ও লেখক

SHAKIL MAHMUD EDITORIAL & RESEARCH SERIES

প্রথম সংকলিত সংস্করণ • ঢাকা ও সিঙ্গাপুর • ২০২৬

গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন

ভন নিউম্যানের মিনিম্যাক্স ও ন্যাশ সাম্যাবস্থা থেকে সাবগেম পারফেকশন, বিবর্তনীয় কৌশল (ইএসএস), নিলাম ডিজাইন, ভিসিজি মেকানিজম এবং ক্রিপ্টোগ্রাফিক অ্যালগরিদমিক গেম থিওরির ২০ খণ্ডের এক প্রামাণ্য বুদ্ধিবৃত্তিক মহাকাব্য।

LIBRARY & CATALOGING-IN-PUBLICATION DATA

Title: গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন
Author: Shakil Mahmud
Series: Shakil Mahmud Editorial & Research Series (Monograph Collection)
Subjects: Science -- History -- Philosophy -- Mathematics -- Civilization
Published: Dhaka & Singapore, 2026
Format: Digital Monograph Offprint (PDF) • Complete 20-Part Collected Edition
Permanent URI: https://shakilmahmud.com/series/game-theory/

প্রস্তাবিত সাইটেশন:
Mahmud, Shakil. (2026). *গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন: The Complete 20-Part Collected Monograph*. Shakil Mahmud Research Series. https://shakilmahmud.com/series/game-theory/

Open Scholarly Access: This collected monograph is published under Open Scholarly Access for personal study, academic citation, university pedagogy, and non-commercial research.

© 2026 Shakil Mahmud. All rights reserved. Typeset and published at Dhaka and Singapore.

Shakil Mahmud • Research Monograph

তাত্ত্বিক ভূমিকা

ভূমিকা: জ্ঞানের একীভূত রূপরেখা

কৌশলগত মিথস্ক্রিয়া হলো সচেতন বুদ্ধিমত্তার অন্তর্নিহিত মৌলিক স্থাপত্য। জন ভন নিউম্যানের মিনিম্যাক্স দ্বৈরথ ও জন ন্যাশের টপোলজিক্যাল ফিক্সড-পয়েন্ট থেকে রাইনহার্ড সেল্টেনের সাবগেম পারফেকশন, বিবর্তনীয় স্থিতিশীল কৌশল (ইএসএস), নিলাম তত্ত্ব, ভিসিজি মেকানিজম, ম্যাচিং মার্কেট এবং আধুনিক ক্রিপ্টোগ্রাফিক অ্যালগরিদমিক অর্থনীতি—গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন হলো মানব সংঘাত, সহযোগিতা ও প্রাতিষ্ঠানিক প্রকৌশলের চরম গাণিতিক রূপরেখা। বিশ খণ্ডে সংকলিত এই গবেষণা মনোগ্রাফ কৌশলগত টানাপোড়েন থেকে নিখুঁত গাণিতিক সাম্যাবস্থা ও স্বায়ত্তশাসিত প্রোটোকল নকশার সমগ্র অভিযাত্রা তুলে ধরে।

এই গবেষণামূলক কাজের উদ্দেশ্য কেবল তথ্য উপস্থাপন নয়, বরং চিন্তার গভীর বিকাশকে পাঠকের সামনে উন্মোচন করা। প্রতিটি পরিচ্ছদ এক একটি যুগান্তকারী বৌদ্ধিক সংকটের সমাধান হিসেবে কীভাবে আবির্ভূত হয়েছে, তা এখানে পদ্ধতিগতভাবে লিপিবদ্ধ করা হলো।

— Shakil Mahmud
Dhaka & Singapore, 2026

অধ্যায় সূচি

সূচিপত্র

প্রথম পর্যায়: প্রাচীন ও শাস্ত্রীয় যুগ

খণ্ড ১ — সংঘাতের আনুষ্ঠানিক রূপ — মিনিম্যাক্স উপপাদ্য ও শূন্য-সমষ্টি দ্বৈরথ — 472 শব্দ
সংঘাতের আনুষ্ঠানিক রূপ — মিনিম্যাক্স উপপাদ্য ও শূন্য-সমষ্টি দ্বৈরথ

খণ্ড ২ — ন্যাশ সাম্যাবস্থা বিপ্লব — টপোলজিক্যাল ফিক্সড-পয়েন্ট ও কৌশলগত প্রতিক্রিয়া — 379 শব্দ
ন্যাশ সাম্যাবস্থা বিপ্লব — টপোলজিক্যাল ফিক্সড-পয়েন্ট ও কৌশলগত প্রতিক্রিয়া

খণ্ড ৩ — বন্দীর উভয়সংকট ও সামাজিক সংকট — প্রভাবশালী কৌশল বনাম প্যারেটো কাম্যতা — 442 শব্দ
বন্দীর উভয়সংকট ও সামাজিক সংকট — প্রভাবশালী কৌশল বনাম প্যারেটো কাম্যতা

খণ্ড ৪ — এক্সটেনসিভ-ফর্ম গেম — গেম ট্রি, বিশ্বাসযোগ্যতা এবং সাবগেম পারফেকশন — 549 শব্দ
এক্সটেনসিভ-ফর্ম গেম — গেম ট্রি, বিশ্বাসযোগ্যতা এবং সাবগেম পারফেকশন

খণ্ড ৫ — পুনরাবৃত্ত খেলা ও ফোক থিওরেম — ভবিষ্যতের ছায়া ও টিট-ফর-ট্যাট — 413 শব্দ
পুনরাবৃত্ত খেলা ও ফোক থিওরেম — ভবিষ্যতের ছায়া ও টিট-ফর-ট্যাট

দ্বিতীয় পর্যায়: মধ্যযুগীয় রূপান্তর

খণ্ড ৬ — অসম্পূর্ণ তথ্য ও বায়েসিয়ান গেম — হারসানিয়ি টাইপ ও অনিশ্চয়তার রূপান্তর — 360 শব্দ
অসম্পূর্ণ তথ্য ও বায়েসিয়ান গেম — হারসানিয়ি টাইপ ও অনিশ্চয়তার রূপান্তর

খণ্ড ৭ — তথ্যের অসামঞ্জস্য ও প্রতিকূল নির্বাচন — অ্যাকারলফের লেমনস মার্কেট পতন — 418 শব্দ
তথ্যের অসামঞ্জস্য ও প্রতিকূল নির্বাচন — অ্যাকারলফের লেমনস মার্কেট পতন

খণ্ড ৮ — ব্যয়বহুল সিগন্যালিং ও সিঙ্গেল-ক্রসিং শর্ত — মাইকেল স্পেন্সের জব মার্কেট মডেল — 443 শব্দ
ব্যয়বহুল সিগন্যালিং ও সিঙ্গেল-ক্রসিং শর্ত — মাইকেল স্পেন্সের জব মার্কেট মডেল

খণ্ড ৯ — ট্রেম্বলিং হ্যান্ডস ও ভারসাম্য পরিশোধন — ভুলের মাঝে সেল্টেনের গাণিতিক শৃঙ্খলা — 379 শব্দ
ট্রেম্বলিং হ্যান্ডস ও ভারসাম্য পরিশোধন — ভুলের মাঝে সেল্টেনের গাণিতিক শৃঙ্খলা

খণ্ড ১০ — চিপ টক ও কৌশলগত তথ্য আদান-প্রদান — ক্রফোর্ড-সোবেল পার্টিশন ও কূটনৈতিক অস্পষ্টতা — 484 শব্দ
চিপ টক ও কৌশলগত তথ্য আদান-প্রদান — ক্রফোর্ড-সোবেল পার্টিশন ও কূটনৈতিক অস্পষ্টতা

তৃতীয় পর্যায়: আধুনিক বিপ্লব ও বিজ্ঞান

খণ্ড ১১ — বিবর্তনীয় গেম থিওরি ও ইএসএস — রেপ্লিকেটর গতিবিদ্যার জৈবিক ক্যালকুলাস — 468 শব্দ
বিবর্তনীয় গেম থিওরি ও ইএসএস — রেপ্লিকেটর গতিবিদ্যার জৈবিক ক্যালকুলাস

খণ্ড ১২ — নেটওয়ার্ক গেম ও স্ট্র্যাটেজিক টপোলজি — গ্রাফ ল্যাপ্লাসিয়ান ও বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি — 456 শব্দ
নেটওয়ার্ক গেম ও স্ট্র্যাটেজিক টপোলজি — গ্রাফ ল্যাপ্লাসিয়ান ও বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি

খণ্ড ১৩ — কোঅপারেটিভ গেম ও দ্য কোর — বৈশিষ্ট্যমূলক ফাংশন ও জোটগত স্থায়িত্ব — 413 শব্দ
কোঅপারেটিভ গেম ও দ্য কোর — বৈশিষ্ট্যমূলক ফাংশন ও জোটগত স্থায়িত্ব

খণ্ড ১৪ — দ্য শ্যাপলে ভ্যালু ও ন্যায্য বণ্টন — ন্যায়বিচারের গাণিতিক স্বতঃসিদ্ধ — 428 শব্দ
দ্য শ্যাপলে ভ্যালু ও ন্যায্য বণ্টন — ন্যায়বিচারের গাণিতিক স্বতঃসিদ্ধ

খণ্ড ১৫ — আচরণগত গেম থিওরি ও সীমাবদ্ধ যৌক্তিকতা — লেভেল-k কগনিটিভ হায়ারার্কি — 432 শব্দ
আচরণগত গেম থিওরি ও সীমাবদ্ধ যৌক্তিকতা — লেভেল-k কগনিটিভ হায়ারার্কি

Shakil Mahmud • Research Monograph

চতুর্থ পর্যায়: সমকালীন যুগ ও ভবিষ্যতের দিগন্ত

খণ্ড ১৬	**রেভেলেশন প্রিন্সিপল ও প্রণোদনা সংগতি — সত্যবাদী প্রতিষ্ঠানের গাণিতিক নকশা** *রেভেলেশন প্রিন্সিপল ও প্রণোদনা সংগতি — সত্যবাদী প্রতিষ্ঠানের গাণিতিক নকশা*	440 শব্দ
খণ্ড ১৭	**ভিক্রি-ক্লার্ক-গ্রোভস (ভিসিজি) মেকানিজম — ক্লার্ক পিভট ট্যাক্স ও সত্যের বিজয়** *ভিক্রি-ক্লার্ক-গ্রোভস (ভিসিজি) মেকানিজম — ক্লার্ক পিভট ট্যাক্স ও সত্যের বিজয়*	448 শব্দ
খণ্ড ১৮	**অপটিমাল অকশন ডিজাইন ও রেভিনিউ সমতুল্যতা — রজার মায়ারসনের নোবেলজয়ী মাস্টারপিস** *অপটিমাল অকশন ডিজাইন ও রেভিনিউ সমতুল্যতা — রজার মায়ারসনের নোবেলজয়ী মাস্টারপিস*	425 শব্দ
খণ্ড ১৯	**ম্যাচিং মার্কেট ও স্থিতিশীল বরাদ্দ — গেল-শ্যাপলে ডেফার্ড অ্যাকসেপ্টেন্স অ্যালগরিদম** *ম্যাচিং মার্কেট ও স্থিতিশীল বরাদ্দ — গেল-শ্যাপলে ডেফার্ড অ্যাকসেপ্টেন্স অ্যালগরিদম*	486 শব্দ
খণ্ড ২০	**অ্যালগরিদমিক গেম থিওরি ও ক্রিপ্টোইকোনমিক্স — প্রাইস অব এনার্কি ও এমইভি নিলাম** *অ্যালগরিদমিক গেম থিওরি ও ক্রিপ্টোইকোনমিক্স — প্রাইস অব এনার্কি ও এমইভি নিলাম*	529 শব্দ

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • প্রথম খণ্ড

সংঘাতের আনুষ্ঠানিক রূপ — মিনিম্যাক্স উপপাদ্য ও শূন্য-সমষ্টি দ্বৈরথ

সংঘাতের আনুষ্ঠানিক রূপ — মিনিম্যাক্স উপপাদ্য ও শূন্য-সমষ্টি দ্বৈরথ

472 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১: *শূন্য-সমষ্টি পে-অফ ম্যাট্রিক্স এবং মিনিম্যাক্স হাইপারপ্লেন, জন ভন নিউম্যানের মিনিম্যাক্স উপপাদ্যের (১৯৪৪) জ্যামিতিক রূপ।*

১৯২৮ সালে হাঙ্গেরীয়-আমেরিকান বহুবিদ্যাবিশারদ জন ভন নিউম্যান গ্যোটিঙেন ম্যাথমেটিক্যাল সোসাইটিতে এমন একটি গবেষণাপত্র উপস্থাপন করেন যা সমাজবিজ্ঞানের গতিপথ চিরতরে বদলে দেয়: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (“কৌশলগত খেলার তত্ত্ব”)। ভন নিউম্যানের পূর্বে মানব সংঘাত, যুদ্ধ এবং অর্থনৈতিক বাণিজ্য কেবল বাগ্মীতা, নৈতিক দর্শন কিংবা ইতিহাসের আকস্মিক ঘটনার দৃষ্টিকোণ থেকে আলোচিত হতো। ভন নিউম্যান প্রথম অনুধাবন করেন যে মানুষের কৌশলগত মিথস্ক্রিয়াকে আইজ্যাক নিউটনের চিরায়ত বলবিদ্যার মতোই নিখুঁত গাণিতিক শৃঙ্খলায় সংজ্ঞায়িত করা সম্ভব: এটি এমন একটি অপ্টিমাইজেশন সমস্যা যেখানে প্রতিটি সিদ্ধান্তের ফলাফল প্রতিপক্ষের সিদ্ধান্তের ওপর প্রত্যক্ষভাবে নির্ভরশীল।

ইউটিলিটির স্বতঃসিদ্ধ রূপরেখা

অনিশ্চয়তার মুখে যৌক্তিক সিদ্ধান্ত পরিমাপের জন্য প্রিন্সটনের ইনস্টিটিউট ফর অ্যাডভান্সড স্টাডিতে ভন নিউম্যান অস্ট্রীয় অর্থনীতিবিদ অস্কার মরগেনস্টার্নের সাথে যৌথভাবে কাজ শুরু করেন। ১৯৪৪ সালে প্রকাশিত তাদের অমর গ্রন্থ *Theory of Games and Economic Behavior*-এ তাঁরা আধুনিক এক্সপেক্টেড ইউটিলিটি থিওরির চারটি ভিত্তি উপস্থাপন করেন: পূর্ণাঙ্গতা, ট্রানজিটিভিটি, অবিচ্ছিন্নতা এবং স্বাধীনতা। কোনো এজেন্টের পছন্দ যদি এই শর্তগুলো পূরণ করে, তবে একটি রিয়েল-ভ্যালুড ইউটিলিটি ফাংশন $u : X tomathbb R$ বিদ্যমান থাকে যার মাধ্যমে প্রত্যাশিত মান সর্বোচ্চ করা যায়:

$$mathbb E[u(L)] = sum_{x in X} p(x) u(x)$$

ইউটিলিটি যখন একটি স্কেলার রাশিতে রূপান্তরিত হলো, তখন কৌশলগত দ্বন্দ্বের আদিমতম রূপ বিশ্লেষণের ভিত্তি রচিত হলো: শূন্য-সমষ্টি দ্বৈরথ (Zero-Sum Game)।

Shakil Mahmud • Research Monograph

শূন্য-সমষ্টি খেলা ও মিনিম্যাক্স উপপাদ্য

একটি দুই-খেলোয়াড়ের শূন্য-সমষ্টি খেলা পে-অফ ম্যাট্রিক্স $AinmathbbR^{ntimesm}$ দ্বারা নির্ধারিত হয়। ১ম খেলোয়াড় i ক্রিয়া নির্বাচন করলে এবং ২য় খেলোয়াড় j ক্রিয়া নির্বাচন করলে, ১ম খেলোয়াড় পায় a_{ij} এবং ২য় খেলোয়াড় হারায় ঠিক a_{ij} (পে-অফ $-a_{ij}$)। সমাজের মোট সম্পদ এখানে ধ্রুবক; একজনের লাভ হুবহু অন্যের ক্ষতির সমান।

যদি খেলোয়াড়রা কেবল একটি নির্দিষ্ট ক্রিয়া নির্বাচনে বাধ্য থাকে, তবে খেলায় সাম্যাবস্থা বা **স্যাডল পয়েন্ট** কেবল তখনই থাকে যখন কোনো এন্ট্রি তার সারির সর্বনিম্ন এবং কলামের সর্বোচ্চ হয়:

$$max_imin_ja_{ij} = min_jmax_ia_{ij} = v^*$$

কিন্তু বাস্তব জীবনে (যেমন পাথর-কাগজ-কাঁচি খেলায়) কোনো পিওর স্যাডল পয়েন্ট থাকে না। যেকোনো নির্ধারিত কৌশল প্রতিপক্ষ অনুমান করে পরাস্ত করতে পারে। ভন নিউম্যানের যুগান্তকারী অবদান ছিল সম্ভাব্যতা সিমপ্লেক্স $Delta_n$ ও $Delta_m$-এ মিশ্র কৌশল (Mixed Strategy) প্রবর্তন করা:

$$max_{xinDelta_n}min_{yinDelta_m}x^TAy = min_{yinDelta_m}max_{xinDelta_n}x^TAy = v^*$$

এই ধ্রুবক v^* হলো *খেলার সামগ্রিক মূল্য (Value of the Game)*। ১ম খেলোয়াড় নিশ্চিত করতে পারে যে সে অন্তত v^* পাবে, আর ২য় খেলোয়াড় ১ম খেলোয়াড়কে অনধিক v^*-এ আটকে রাখতে পারে।

লিনিয়ার প্রোগ্রামিং ডুয়ালিটি ও হাইপারপ্লেন সেপারেশন

ভন নিউম্যান প্রথমে ব্রাউয়ারের ফিক্সড-পয়েন্ট উপপাদ্য দিয়ে এটি প্রমাণ করলেও ১৯৪৭ সালে জর্জ ডানটজিগের সাথে আলোচনার পর দেখা যায় যে মিনিম্যাক্স উপপাদ্য এবং **লিনিয়ার প্রোগ্রামিংয়ের ডুয়ালিটি উপপাদ্য** অভিন্ন। ১ম খেলোয়াড়ের সর্বোত্তম মিশ্র কৌশল খোঁজা হলো প্রাইমাল লিনিয়ার প্রোগ্রাম সমাধান করা, আর ২য় খেলোয়াড়ের কৌশল হলো তার ডুয়াল প্রোগ্রাম সমাধান করা। স্ট্রং ডুয়ালিটির কারণে তাদের ফলাফল $v^* = u^*$ সমান হয়।

কৌশলগত উপলব্ধি

মিনিম্যাক্স উপপাদ্য প্রমাণ করে যে প্রতিপক্ষের মনস্তাত্ত্বিক অনুমান করার প্রয়োজন নেই। মিনিম্যাক্স মিশ্র কৌশল প্রয়োগের মাধ্যমে একজন খেলোয়াড় এমন একটি গাণিতিক দুর্গ তৈরি করে যেখানে প্রতিপক্ষ যেকোনো পাল্টা চাল দিলেও সমপরিমাণ সুবিধা অর্জনে অক্ষম হয়।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "সংঘাতের আনুষ্ঠানিক রূপ — মিনিম্যাক্স উপপাদ্য ও শূন্য-সমষ্টি দ্বৈরথ"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-01-formalization-conflict-minimax-zero-sum-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দ্বিতীয় খণ্ড

ন্যাশ সাম্যাবস্থা বিপ্লব — টপোলজিক্যাল ফিক্সড-পয়েন্ট ও কৌশলগত প্রতিক্রিয়া

ন্যাশ সাম্যাবস্থা বিপ্লব — টপোলজিক্যাল ফিক্সড-পয়েন্ট ও কৌশলগত প্রতিক্রিয়া

379 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ২: *কৌশল স্পেসে রিঅ্যাকশন কার্ভের ছেদবিন্দু, যা ন্যাশ সাম্যাবস্থা ও কাকুতানি ফিক্সড-পয়েন্ট উপপাদ্য প্রদর্শন করে।*

১৯৪৯ সালের নভেম্বরে প্রিন্সটন বিশ্ববিদ্যালয়ের এক একুশ বছর বয়সী পিএইচডি শিক্ষার্থী জন ফোর্বস ন্যাশ জুনিয়র জন ভন নিউম্যানের অফিসে প্রবেশ করেন। ন্যাশের কাছে এমন একটি যুগান্তকারী তাত্ত্বিক প্রস্তাবনা ছিল যা শূন্য-সমষ্টি খেলার সীমাবদ্ধতাকে গুঁড়িয়ে দিতে সক্ষম: একটি সর্বজনীন প্রমাণ যে *প্রতিটি* সসীম নন-কোঅপারেটিভ খেলা—তা শূন্য-সমষ্টি হোক বা অ-শূন্য-সমষ্টি, প্রতিসম হোক বা অপ্রতিসম—কমপক্ষে একটি পারস্পরিক স্থিতিশীল সাম্যাবস্থা ধারণ করতে বাধ্য। ভন নিউম্যান প্রথমে বিষয়টিকে তাচ্ছিল্য করে বলেছিলেন: *"এটা তো সাধারণ বিষয়, স্রেফ একটা ফিক্সড পয়েন্ট উপপাদ্য।"* কিন্তু ন্যাশের ২৮ পৃষ্ঠার সেই ডক্টরাল থিসিস এমন একটি সাম্যাবস্থার ধারণা উন্মোচন করে যা আজ অর্থনীতি, জীববিজ্ঞান, আন্তর্জাতিক ভূরাজনীতি ও কম্পিউটার বিজ্ঞানের ভিত্তিপ্রস্তর।

শূন্য-সমষ্টির ঊর্ধ্বে: সাধারণ অ-সহযোগিতামূলক খেলা

ভন নিউম্যানের মিনিম্যাক্স কাঠামো অত্যন্ত শক্তিশালী হলেও বাস্তব জীবনে মানুষ প্রায় কখনোই শূন্য-সমষ্টি দ্বন্দ্বে লিপ্ত হয় না। আন্তর্জাতিক বাণিজ্য উভয়ের জন্যই সম্পদ সৃষ্টি করে; পারমাণবিক যুদ্ধ উভয়ের জন্যই চরম ধ্বংস ডেকে আনে; যৌথ কারিগরি প্রমিতকরণ বৈশ্বিক নেটওয়ার্ক তৈরি করে। নন-জিরো-সাম খেলায় খেলোয়াড়দের লক্ষ্য পুরোপুরি শত্রুভাবাপন্নও নয়, আবার পুরোপুরি সহযোগিতামূলকও নয়—তা পরস্পরের সাথে ওতপ্রোতভাবে জড়িত।

ন্যাশ সাম্যাবস্থার সংজ্ঞা

একটি মিশ্র কৌশল প্রোফাইল $sigma^* = (sigma_1^*, dots, sigma_n^*)$ হলো একটি **ন্যাশ সাম্যাবস্থা** যদি কোনো খেলোয়াড়ের একা সিদ্ধান্ত বদলে নিজের পে-অফ বাড়ানোর সুযোগ না থাকে। অর্থাৎ, প্রত্যেক খেলোয়াড় i এবং তার যেকোনো বিকল্প কৌশল $sigma_i$-এর জন্য:

Shakil Mahmud • Research Monograph

$$u_i(sigma_i^*, sigma_{-i}^*) geu_i(sigma_i, sigma_{-i}^*), quad forall sigma_i in Delta(S_i)$$

ন্যাশ সাম্যাবস্থায় প্রতিটি খেলোয়াড়ের কৌশল হলো অন্যদের গৃহীত কৌশলের বিপরীতে সর্বোত্তম প্রতিক্রিয়া (Best Response)। প্রত্যাশা এখানে স্ব-বাস্তবায়নকারী: বর্তমান অবস্থা বজায় থাকা অবস্থায় কোনো একক এজেন্টের কৌশল বদলানোর কোনো প্রণোদনা নেই।

কাকুতানি ফিক্সড-পয়েন্ট উপপাদ্যের মাধ্যমে প্রমাণ

এই সাম্যাবস্থা কেন সবসময় বিদ্যমান থাকতে বাধ্য, তা প্রমাণের জন্য ন্যাশ **বেস্ট-রেসপন্স করেসপনডেন্স** প্রবর্তন করেন। প্রতিটি খেলোয়াড়ের জন্য প্রতিপক্ষের কৌশলের বিপরীতে সর্বোচ্চ পে-অফ প্রদানকারী কৌশল সেট হলো $B_i(sigma_{-i})$। এদের কার্তেসীয় গুণফল $B(sigma)$ হলো পুরো কৌশল সিমপ্লেক্সের ওপর একটি সেট-ভ্যালুড ম্যাপিং।

একটি কৌশল প্রোফাইল $sigma^*$ ন্যাশ সাম্যাবস্থা হবে যদি এবং কেবল যদি তা নিজের সর্বোত্তম প্রতিক্রিয়ার অন্তর্ভুক্ত হয়:

$$sigma^* in B(sigma^*)$$

ন্যাশ টপোলজির **কাকুতানি ফিক্সড-পয়েন্ট উপপাদ্য** প্রয়োগ করেন। যেহেতু খেলোয়াড়দের কৌশল সিমপ্লেক্স কমপ্যাক্ট এবং উত্তল (Convex), এবং এক্সপেক্টেড ইউটিলিটি লিনিয়ার হওয়ায় সর্বোত্তম প্রতিক্রিয়া সেটটি উত্তল এবং আপার হেমি-কন্টিনিউয়াস, তাই কাকুতানি উপপাদ্য নিশ্চিত করে যে এই ম্যাপিংয়ে অন্তত একটি অবিচল বিন্দু বা ফিক্সড পয়েন্ট থাকবেই।

ন্যাশের বিপ্লব

ন্যাশ সাম্যাবস্থাকে সামাজিক সহযোগিতা থেকে মুক্ত করেন। শাস্ত্রীয় অর্থনীতিতে ভারসাম্য মানে ছিল বাজারের নিখুঁত সমঝোতা। ন্যাশের সংজ্ঞায় সাম্যাবস্থা হলো সম্পূর্ণ আত্মস্বার্থপর, পারস্পরিক সন্দেহপ্রবণ স্বাধীন এজেন্টদের একটি অনড় স্থিরাবস্থা—বাস্তবতার এক নির্মম গাণিতিক প্রতিফলন।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ন্যাশ সাম্যাবস্থা বিপ্লব — টপোলজিক্যাল ফিক্সড-পয়েন্ট ও কৌশলগত প্রতিক্রিয়া"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ২।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-02-nash-equilibrium-fixed-points-reaction-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • তৃতীয় খণ্ড

বন্দীর উভয়সংকট ও সামাজিক সংকট — প্রভাবশালী কৌশল বনাম প্যারেটো কাম্যতা

বন্দীর উভয়সংকট ও সামাজিক সংকট — প্রভাবশালী কৌশল বনাম প্যারেটো কাম্যতা

442 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৩: *বন্দীর উভয়সংকট (প্রিজনার্স ডিলেমা) ম্যাট্রিক্স ও প্যারেটো ফ্রন্টিয়ার, ব্যক্তিগত স্বার্থ ও সামাজিক ভারসাম্যের সংঘাত।*

১৯৫০ সালে সান্তা মনিকার র‍্যান্ড কর্পোরেশনে দুই গণিতবিদ মেরিল ফ্লাড এবং মেলভিন ড্রেশার মার্কিন যুক্তরাষ্ট্র ও সোভিয়েত ইউনিয়নের মধ্যে পারমাণবিক অস্ত্র প্রতিযোগিতাকে মডেল করতে সহজ ২×২ পে-অফ ম্যাট্রিক্স নিয়ে গবেষণা করছিলেন। পরবর্তীকালে যখন অ্যালবার্ট টাকার দুই বন্দীর জবানবন্দির গল্পের মাধ্যমে এই সংকটটি প্রকাশ করেন, তখন এটি ইতিহাসে **বন্দীর উভয়সংকট (The Prisoner's Dilemma)** নামে খ্যাত হয়। এটি মানব ইতিহাসের সর্বাধিক বিশ্লেষিত কৌশলগত সমস্যা: একটি অকাট্য গাণিতিক প্রমাণ যে ব্যক্তি যখন নিজের স্বার্থে সর্বোচ্চ যৌক্তিক আচরণ করে, তখন তার সম্মিলিত পরিণতি হতে পারে সমাজের চরম সর্বনাশ।

সংকটের রূপরেখা ও পে-অফ ম্যাট্রিক্স

দুইজন সন্দেহভাজন অপরাধীকে আলাদা সেলে জিজ্ঞাসাবাদ করা হচ্ছে, তাদের মধ্যে কোনো যোগাযোগের সুযোগ নেই। তদন্তকারী কর্মকর্তা উভয়কে একই প্রস্তাব দিলেন:

- যদি ১ম বন্দী বিশ্বাসঘাতকতা করে (D) এবং ২য় বন্দী চুপ থাকে (C), তবে ১ম বন্দী মুক্তি পাবে (০ বছর কারাদণ্ড), আর ২য় বন্দী পাবে ৫ বছরের কঠোর শাস্তি।
- উভয়েই যদি নীরব থাকে বা সহযোগিতা করে (C), তবে প্রমাণের অভাবে উভয়কে মাত্র ১ বছরের সাজা ভোগ করতে হবে।
- উভয়েই যদি পরস্পরের বিরুদ্ধে সাক্ষ্য দেয় বা বিশ্বাসঘাতকতা করে (D), তবে উভয়েই ৩ বছর করে সাজা পাবে।

Shakil Mahmud • Research Monograph

প্রভাবশালী কৌশল ও ন্যাশ ফাঁদ

১ম বন্দীর দৃষ্টিকোণ থেকে সিদ্ধান্তটি বিবেচনা করা যাক:

- যদি ২য় বন্দী চুপ থাকে (C), তবে ১ম বন্দী -১ (সহযোগিতা) বনাম ০ (বিশ্বাসঘাতকতা)-এর মধ্যে তুলনা করবে। বিশ্বাসঘাতকতা করলেই মুক্তি (০ > -১)।
- যদি ২য় বন্দী বিশ্বাসঘাতকতা করে (D), তবে ১ম বন্দী -৫ বনাম -৩-এর মধ্যে তুলনা করবে। এখানেও বিশ্বাসঘাতকতা তাকে ২ বছরের জেল থেকে বাঁচাবে (-৩ > -৫)।

প্রতিপক্ষ যা-ই করুক না কেন, বিশ্বাসঘাতকতা হলো একটি **কঠোর প্রভাবশালী কৌশল (Strictly Dominant Strategy)**। একই যুক্তিতে ২য় বন্দীর জন্যও বিশ্বাসঘাতকতা একমাত্র প্রভাবশালী কৌশল। ফলে এই খেলার একমাত্র ন্যাশ সাম্যাবস্থা হলো (D, D), যার ফলাফল $(-৩, -৩)$। অথচ উভয়ে সহযোগিতা করলে ফল হতো $(-১, -১)$, যা উভয় বন্দীর জন্যই শ্রেয় ছিল।

সামাজিক ট্র্যাজেডি ও ট্র্যাজেডি অব দ্য কমন্স

প্রিজনার্স ডিলেমা কেবল কোনো কৌতূহলোদ্দীপক ধাঁধা নয়; এটি মানব সমাজের প্রায় সমস্ত কাঠামোগত ব্যর্থতার মূল বীজ। গ্যারেট হার্ডিনের ১৯৬৮ সালের *ট্র্যাজেডি অব দ্য কমন্স* এর প্রত্যক্ষ বিস্তার:

- **মৎস্য শিকার ও জীববৈচিত্র্য ধ্বংস:** অতিরিক্ত মাছ ধরলে একক জেলের তাৎক্ষণিক লাভ হয়, কিন্তু সাগরের প্রাকৃতিক ভারসাম্য নষ্ট হওয়ার ক্ষতি বহন করে পুরো বিশ্ব। ফলে সবার প্রভাবশালী কৌশল হলো অতিরিক্ত মাছ শিকার করে প্রজাতি বিলুপ্ত করা।
- **জলবায়ু পরিবর্তন:** জীবাশ্ম জ্বালানি পোড়ালে শিল্পোন্নত দেশগুলোর তাৎক্ষণিক অর্থনৈতিক প্রবৃদ্ধি হয়, কিন্তু বৈশ্বিক তাপমাত্রা বৃদ্ধির ভয়াবহ ক্ষতি সারা বিশ্বকে ভোগ করতে হয়।
- **পারমাণবিক অস্ত্রের প্রতিযোগিতা:** প্রতিপক্ষের আক্রমণের ভয়ে অস্ত্র তৈরি করাই প্রভাবশালী কৌশল, যার ফলে উভয় দেশ ট্রিলিয়ন ডলার ব্যয় করে সমপরিমাণ অনিরাপদ অবস্থায় পতিত হয়।

সংকট থেকে মুক্তির পথ

একটি ওয়ান-শট প্রিজনার্স ডিলেমাতে কোনো যুক্তিযুক্ত এজেন্টের পক্ষে সহযোগিতা করা অসম্ভব। এই সংকট দূর করতে হলে খেলার কাঠামো বদলাতে হয়—আইন প্রয়োগকারী কর্তৃপক্ষ (হবসীয় লেভিয়াথান), ক্রিপ্টোগ্রাফিক স্মার্ট চুক্তি অথবা বারবার খেলার মাধ্যমে দীর্ঘমেয়াদী প্রতিশোধের ভয় তৈরি করা।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "বন্দীর উভয়সংকট ও সামাজিক সংকট — প্রভাবশালী কৌশল বনাম প্যারেটো কাম্যতা"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ৩।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-03-prisoners-dilemma-social-traps-pareto-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • চতুর্থ খণ্ড

এক্সটেনসিভ-ফর্ম গেম — গেম ট্রি, বিশ্বাসযোগ্যতা এবং সাবগেম পারফেকশন

এক্সটেনসিভ-ফর্ম গেম — গেম ট্রি, বিশ্বাসযোগ্যতা এবং সাবগেম পারফেকশন

549 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৪: *ব্যাকওয়ার্ড ইন্ডাকশন পাথসহ এক্সটেনসিভ-ফর্ম গেম ট্রি, রাইনহার্ড সেল্টেনের সাবগেম পারফেক্ট ইকুইলিব্রিয়াম (১৯৬৫)।*

একযোগে চাল দেওয়ার খেলায় (Simultaneous Games) খেলোয়াড়রা প্রতিপক্ষের চাল না জেনেই সিদ্ধান্ত নেয়। কিন্তু মানব ইতিহাসের অধিকাংশ সংকট ও সংঘাত সময়ের পরিক্রমায় ধাপে ধাপে ক্রমানুসারে উন্মোচিত হয়: একটি প্রযুক্তি কোম্পানি নতুন পণ্য উদ্ভাবন করে, তারপর তার প্রতিদ্বন্দ্বী সিদ্ধান্ত নেয় তারা এটি নকল করবে নাকি নতুন উদ্ভাবনে যাবে; এক দেশ অন্য দেশকে আল্টিমেটাম দেয়, তারপর দ্বিতীয় দেশ সিদ্ধান্ত নেয় তারা আত্মসমর্পণ করবে নাকি যুদ্ধ করবে। ক্রমানুসারে সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে সময়ই হলো আসল নিয়ামক। ১৯৬৫ সালে জার্মান নোবেল বিজয়ী অর্থনীতিবিদ রাইনহার্ড সেল্টেন চিরায়ত গেম থিওরির একটি মারাত্মক ত্রুটি চিহ্নিত করেন: *অবিশ্বাস্য হুমকির ফাঁদ (Incredible Threats)*। এই সমস্যা দূর করতে তিনি উদ্ভাবন করেন **সাবগেম পারফেক্ট ইকুইলিব্রিয়াম (Subgame Perfect Equilibrium)**।

এক্সটেনসিভ ফর্ম ও গেম ট্রি

ক্রমানুসারে চাল দেওয়া খেলাগুলোকে একটি দিকনির্দেশক গাছের কাঠামো বা গেম ট্রি (Game Tree) হিসেবে প্রকাশ করা হয়:

- **নোড (Nodes):** সিদ্ধান্ত গ্রহণের বিন্দু, যা শুরু হয় মূল নোড x_0 থেকে।
- **শাখা (Branches):** সেই নোডে খেলোয়াড়ের জন্য বিদ্যমান নির্দিষ্ট ক্রিয়া বা চাল।
- **ইনফরমেশন সেট (Information Sets):** খেলোয়াড়দের তথ্যের পরিধি। যদি কোনো ইনফরমেশন সেটে একটির বেশি নোড থাকে, তবে খেলোয়াড় জানতে পারে না সে ঠিক কোন নোডে অবস্থান করছে।
- **প্রান্তিক নোড ও পে-অফ (Terminal Nodes):** যেখানে খেলা শেষ হয় এবং চূড়ান্ত লাভ-ক্ষতির ভেক্টর নির্ধারিত হয়।

Shakil Mahmud • Research Monograph

বাজারে প্রবেশ বনাম অবিশ্বাস্য হুমকি

একটি চিরায়ত ব্যবসায়িক পরিস্থিতির কথা ভাবা যাক: একটি নতুন প্রতিদ্বন্দ্বী কোম্পানি বাজারে একচেটিয়া আধিপত্য বিস্তারকারী পুরোনো কোম্পানির বিরুদ্ধে বাজারে প্রবেশের কথা ভাবছে।

1. নতুন কোম্পানি প্রথমে চাল দেবে: **প্রবেশ করবে (Enter)** অথবা **দূরে থাকবে (Stay Out)**। দূরে থাকলে ফলাফল $(০, ৪)$ (নতুন কোম্পানির লাভ ০, পুরোনো কোম্পানির একচেটিয়া মুনাফা ৪)।
2. নতুন কোম্পানি প্রবেশ করলে পুরোনো কোম্পানি চাল দেবে: **মেনে নেবে (Accommodate)** নাকি **যুদ্ধ করবে (Fight)** (আগ্রাসী মূল্যযুদ্ধ শুরু করা)।
3. মেনে নিলে উভয়ের লাভ $(২, ২)$। আর মূল্যযুদ্ধ শুরু করলে উভয়ই চরম লোকসান গুনবে: $(-১, -১)$।

সাধারণ ন্যাশ সাম্যাবস্থার দৃষ্টিতে এই খেলায় **দুটি সাম্যাবস্থা** দেখা যায়:

- **সাম্যাবস্থা ১:** (প্রবেশ করা, মেনে নেওয়া) $implies$ পে-অফ: $(২, ২)$।
- **সাম্যাবস্থা ২:** (দূরে থাকা, যুদ্ধ করা) $implies$ পে-অফ: $(০, ৪)$।

দ্বিতীয় সাম্যাবস্থাটি গভীরভাবে বিশ্লেষণ করা যাক। পুরোনো কোম্পানি হুমকি দিল: *“তুমি যদি বাজারে ঢোকো, আমি চরম মূল্যযুদ্ধ শুরু করে তোমাকেও ধ্বংস করব!”* নতুন কোম্পানি যদি এই হুমকি বিশ্বাস করে, তবে দূরে থাকাই তার লাভজনক চাল (০ > -১)। কিন্তু এই হুমকিটি আসলে অবিশ্বাস্য! নতুন কোম্পানি যদি বাস্তবে বাজারে ঢুকেই পড়ে, তখন পুরোনো কোম্পানি -১ (যুদ্ধ) বনাম ২ (মেনে নেওয়া)-এর মুখে পড়বে। তখন নিজের ক্ষতি করে প্রতিশোধ নেওয়া কোনো যৌক্তিক আচরণ নয়। এটি একটি **অবিশ্বাস্য হুমকি (Incredible Threat)**।

ব্যাকওয়ার্ড ইন্ডাকশন ও সাবগেম পারফেকশন

রাইনহার্ড সেল্টেন প্রমাণ করলেন যে কোনো ভারসাম্যকে কেবল শুরুতে নয়, খেলার প্রতিটি সম্ভাব্য উপ-অংশে বা সাবগেমে যুক্তিযুক্ত হতে হবে। সসীম খেলায় এই ভারসাম্য খোঁজার নিখুঁত গাণিতিক পদ্ধতি হলো **ব্যাকওয়ার্ড ইন্ডাকশন (Backward Induction)**:

1. খেলার একদম শেষ প্রান্তের সিদ্ধান্ত নোডগুলোতে যান।
2. সেখানে খেলোয়াড়ের সর্বোচ্চ লাভজনক চালটি রেখে বাকি সব অপ্রয়োজনীয় শাখা কেটে ফেলুন (Pruning)।
3. সেই সিদ্ধান্তের মান আগের নোডে বসিয়ে গাছের গোড়ার দিকে পেছাতে থাকুন।
4. মূল নোড পর্যন্ত এই প্রক্রিয়া পুনরাবৃত্তি করুন।

বাজারের খেলায় ব্যাকওয়ার্ড ইন্ডাকশন প্রয়োগ করলে দেখা যায়: শেষ নোডে পুরোনো কোম্পানি অবশ্যই ২ > -১ বিবেচনায় *মেনে নেবে*। এটি আগে থেকেই অনুমান করে নতুন কোম্পানি শুরুতে *প্রবেশ করবে* (২ > ০)। ফলে এই খেলার একমাত্র সাবগেম পারফেক্ট ইকুইলিব্রিয়াম হলো **(Enter, Accommodate)**।

বিশ্বাসযোগ্যতার মূলনীতি

কৌশলগত শক্তি কেবল ভয়ংকর হুমকি প্রদর্শন থেকে আসে না; এটি আসে এমন একটি অবস্থান তৈরি করা থেকে যেখানে সংকটের মুহূর্তে হুমকি বাস্তবায়ন করাই নিজের স্বার্থে পরিণত হয়। যে হুমকি বাস্তবায়নে নিজের ক্ষতি হয়, যৌক্তিক প্রতিপক্ষের কাছে তার কোনো মূল্য নেই।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "এক্সটেনসিভ-ফর্ম গেম — গেম ট্রি, বিশ্বাসযোগ্যতা এবং সাবগেম পারফেকশন"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ৪।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-04-extensive-form-subgame-perfection-credibility-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • পঞ্চম খণ্ড

পুনরাবৃত্ত খেলা ও ফোক থিওরেম — ভবিষ্যতের ছায়া ও টিট-ফর-ট্যাট

পুনরাবৃত্ত খেলা ও ফোক থিওরেম — ভবিষ্যতের ছায়া ও টিট-ফর-ট্যাট

413 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৫: *পুনরাবৃত্ত খেলায় ফোক থিওরেম পে-অফ অঞ্চল, যা ডিসকাউন্ট ফ্যাক্টর δ দ্বারা দীর্ঘমেয়াদী সহযোগিতা নিশ্চিত করে।*

প্রিজনার্স ডিলেমা যদি প্রমাণ করে থাকে যে একমাত্রিক দ্বৈরথে যৌক্তিক মানুষ পারস্পরিক ধ্বংসের দিকে যেতে বাধ্য, তবে বাস্তব জীবন এক পরম বিস্ময় উপস্থাপন করে: মানব সমাজ, জৈবিক বাস্তুতন্ত্র এবং আন্তর্জাতিক বাণিজ্য প্রতিদিন বিপুল পরিমাণ বিশ্বাস ও সহযোগিতার ওপর ভর করে টিকে আছে। এর কারণ কী? কারণ মানবজীবনে সামাজিক মিথস্ক্রিয়া কখনো একক বিচ্ছিন্ন ঘটনা নয়। আমরা একই সহকর্মী, একই ব্যবসায়ী এবং একই প্রতিদ্বন্দ্বীর সাথে দিনের পর দিন, বছরের পর বছর লেনদেন করি। ১৯৫০-এর দশকে গেম তাত্ত্বিকরা এই বিস্ময়কর বাস্তবতাকেই গণিতের ইতিহাসে অন্যতম সেরা ফলাফলে রূপ দেন: পুনরাবৃত্ত খেলার **ফোক থিওরেম (The Folk Theorem)**।

পুনরাবৃত্ত খেলার জ্যামিতি ও ডিসকাউন্ট ফ্যাক্টর

ধরা যাক একটি মৌলিক খেলা G সময়রেখায় অনন্তকাল ধরে বারবার খেলা হচ্ছে $(t = 0, 1, 2, dots, infty)$। প্রতিটি ধাপে খেলোয়াড়রা পূর্ববর্তী সকল চালের পূর্ণ ইতিহাস প্রত্যক্ষ করতে পারে। ভবিষ্যতের পে-অফ আজকের চেয়ে কম মূল্যবান হওয়ায় খেলোয়াড়রা তাদের ভবিষ্যৎ আয়কে একটি সূচকীয় ডিসকাউন্ট ফ্যাক্টর $deltain(0, 1)$ দিয়ে মূল্যায়ন করে:

U_i = (1 – delta) sum_{t=0}^infty delta^t u_i(a^t)

এখানে $delta$ নির্দেশ করে খেলোয়াড়ের ধৈর্য (Time Preference) এবং আগামী পর্বেও এই খেলা চলমান থাকার সম্ভাবনা।

Shakil Mahmud • Research Monograph

মিনিম্যাক্স থ্রেট পয়েন্ট ও ফোক থিওরেম

পুনরাবৃত্ত খেলায় দীর্ঘমেয়াদে কোনো খেলোয়াড়কে সর্বনিম্ন যে শাস্তি দেওয়া সম্ভব, তা হলো তার **মিনিম্যাক্স মান** $underline{v}_i$। কোনো যুক্তিশীল খেলোয়াড়কে এই মানের নিচে নামানো অসম্ভব, কারণ সে সবসময় মিনিম্যাক্স প্রতিরক্ষা চালিয়ে অন্তত $underline{v}_i$ নিশ্চিত করতে পারে। যে পে-অফ ভেক্টরে সবার আয় $underline{v}_i$-এর চেয়ে বেশি, তাকে *ব্যক্তিগতভাবে যুক্তিযুক্ত পে-অফ (Individually Rational Payoff)* বলে।

ফ্রিডম্যান-অম্যান ফোক থিওরেম ঘোষণা করে:

ফোক থিওরেমের অমর বাণী

যদি খেলোয়াড়দের সম্ভাব্য পে-অফ তাদের নিজ নিজ মিনিম্যাক্স মানের চেয়ে বেশি হয় এবং তারা যথেষ্ট ধৈর্যশীল হয় ($delta to ১$), তবে যেকোনো সম্ভাব্য লাভজনক সহযোগিতাকেই একটি সাবগেম পারফেক্ট ইকুইলিব্রিয়াম হিসেবে অনির্দিষ্টকাল টিকিয়ে রাখা সম্ভব।

ট্রিগার স্ট্র্যাটেজি: গ্রিম ট্রিগার বনাম টিট-ফর-ট্যাট

কোনো কেন্দ্রীয় পুলিশ বা আদালত ছাড়া এই সহযোগিতা কীভাবে টিকে থাকে? প্রতিশোধের বিশ্বাসযোগ্য কাঠামোর মাধ্যমে:

- **গ্রিম ট্রিগার (Grim Trigger):** আমি আজীবন সহযোগিতা করে যাব যতক্ষণ তুমি সহযোগিতা করবে। কিন্তু তুমি যদি একবারও বিশ্বাসঘাতকতা করো, আমি বাকি অনন্তকাল তোমাকে শাস্তি দেব।
  এককালীন বিশ্বাসঘাতকতার লাভ (T) এবং আজীবনের শাস্তি (P)-এর বিপরীতে আজীবনের সহযোগিতার লাভ (R) তুলনা করলে শর্ত দাঁড়ায়:

  delta ge frac{T – R}{T – P}

  যদি খেলোয়াড়ের ভবিষ্যৎ বিবেচনা এই থ্রেশহোল্ড অতিক্রম করে, তবে বর্তমানের লোভ ভবিষ্যতের চরম ভয়ের কাছে পরাস্ত হয়।
- **টিট-ফর-ট্যাট (Tit-for-Tat):** রবার্ট অ্যাক্সেলরডের বিখ্যাত টুর্নামেন্টে দেখা গেছে সবচেয়ে সরল কৌশলটি সব জটিল কৌশলকে হারিয়ে দিয়েছে। টিট-ফর-ট্যাট প্রথমে সহযোগিতা করে, তারপর প্রতিপক্ষ আগের চালে যা করেছিল হুবহু তা-ই করে। এটি ভদ্র (নিজে আগে প্রতারণা করে না), প্রতিশোধপরায়ণ (প্রতারণার তাৎক্ষণিক জবাব দেয়), ক্ষমাশীল (প্রতিপক্ষ ভালো হলে তৎক্ষণাৎ সহযোগিতা ফিরিয়ে আনে) এবং স্বচ্ছ।

---

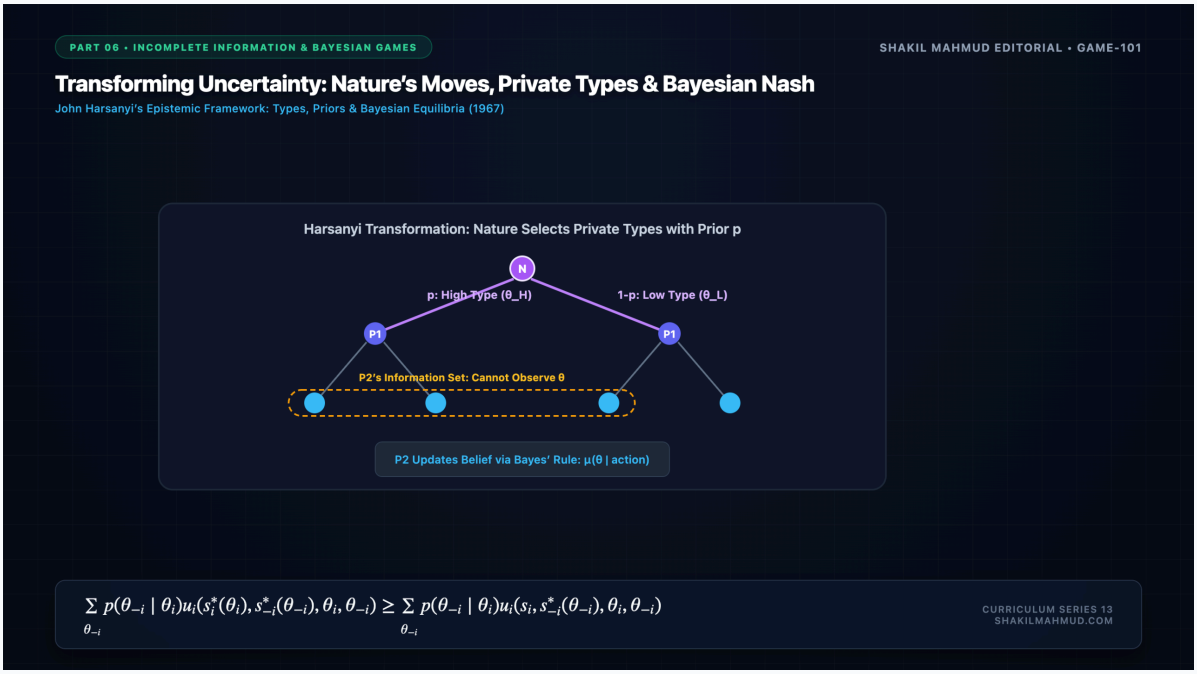
*সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "পুনরাবৃত্ত খেলা ও ফোক থিওরেম — ভবিষ্যতের ছায়া ও টিট-ফর-ট্যাট"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ৫।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-05-repeated-games-folk-theorem-tit-for-tat-bn/*

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ষষ্ঠ খণ্ড

অসম্পূর্ণ তথ্য ও বায়েসিয়ান গেম — হারসানিয়ি টাইপ ও অনিশ্চয়তার রূপান্তর

অসম্পূর্ণ তথ্য ও বায়েসিয়ান গেম — হারসানিয়ি টাইপ ও অনিশ্চয়তার রূপান্তর

360 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৬: *হারসানিয়ির বায়েসিয়ান গেম রূপান্তর, যেখানে প্রকৃতি খেলোয়াড়দের ব্যক্তিগত টাইপ ও তথাসমষ্টি নির্ধারণ করে।*

১৯৬০-এর দশকের শেষভাগ পর্যন্ত গেম থিওরি একটি অবাস্তব কল্পনার ওপর দাঁড়িয়ে ছিল: ধারণা করা হতো সকল খেলোয়াড় প্রতিপক্ষের লক্ষ্য, পে-অফ এবং মনস্তাত্ত্বিক উদ্দেশ্য সম্পর্কে *সম্পূর্ণ তথ্য (Complete Information)* রাখে। কিন্তু বাস্তব পৃথিবীতে এমন নিখুঁত স্বচ্ছতা অসম্ভব: যুদ্ধে কোনো জেনারেল জানে না শত্রুপক্ষের গোপন অস্ত্র কত শক্তিশালী; শেয়ার বাজারে বিনিয়োগকারী জানে না উদ্যোক্তার প্রযুক্তিটি আসল নাকি প্রতারণা। বিশ বছর ধরে এই তথ্যের অস্বচ্ছতা গেম থিওরিকে বাস্তব অর্থনীতিতে প্রয়োগের ক্ষেত্রে পঙ্গু করে রেখেছিল। ১৯৬৭ সালে হাঙ্গেরীয় অর্থনীতিবিদ জন হারসানিয়ি *ম্যানেজমেন্ট সায়েন্স* জার্নালে তিন খণ্ডে এমন এক তত্ত্ব প্রকাশ করেন যা তথ্যের এই গোলকধাঁধা চিরতরে সমাধান করে, যার স্বীকৃতিস্বরূপ তিনি ১৯৯৪ সালে অর্থনীতিতে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন।

বিশ্বাসের অসীম গোলকধাঁধা

অসম্পূর্ণ তথ্যকে কেন আগে গাণিতিকভাবে মডেল করা যেত না? কারণ এটি মনস্তাত্ত্বিক অনুমানের এক অন্তহীন অনন্ত চক্র তৈরি করত: *"আমি ভাবছি সে ভাবছে আমি কী ভাবছি তার সামর্থ্য সম্পর্কে..."* অনুমানের ওপর অনুমানের এই স্তর অনন্তকাল ধরে চলত।

হারসানিয়ি রূপান্তর: প্রকৃতির আগমন

হারসানিয়ির যুগান্তকারী প্রতিভা ছিল এই বিশ্বাসের অনন্ত চক্রকে একটি কাল্পনিক নিরপেক্ষ শক্তি **প্রকৃতি (Nature)**-র চাল দিয়ে প্রতিস্থাপন করা।

1. একজন খেলোয়াড়ের সমস্ত ব্যক্তিগত বৈশিষ্ট্য (তার উৎপাদন খরচ, ঝুঁকি নেওয়ার প্রবণতা বা মূল্যায়ন) একটি চলকের মধ্যে আবদ্ধ করা হয় যাকে তার **টাইপ** ($theta_i$) বলা হয়।
2. খেলা শুরু হওয়ার আগে **প্রকৃতি** প্রথম চাল দেয়। প্রকৃতি একটি যৌথ সম্ভাব্যতা বণ্টন $p(theta)$ অনুযায়ী খেলোয়াড়দের টাইপ নির্ধারণ করে।
3. প্রতিটি খেলোয়াড় কেবল তার নিজের টাইপ $theta_i$ দেখতে পায়, কিন্তু প্রতিপক্ষের টাইপ দেখতে পায় না।

Shakil Mahmud • Research Monograph

4. নিজের টাইপ জানার পর খেলোয়াড় **বায়েজের সূত্র (Bayes' Rule)** ব্যবহার করে প্রতিপক্ষের সম্ভাব্য টাইপ সম্পর্কে তার বিশ্বাস আপডেট করে:

p(theta_{-i} mid theta_i) = frac{p(theta_i, theta_{-i})}{sum p(theta_i, theta’_{-i})}

এই রূপান্তরের মাধ্যমে একটি অসম্ভব *অসম্পূর্ণ তথ্যের খেলা* নিখুঁতভাবে রূপান্তরিত হলো *অপূর্ণ তথ্যের (Imperfect Information)* সাধারণ গেম ট্রিতে।

বায়েসিয়ান ন্যাশ সাম্যাবস্থা

বায়েসিয়ান গেমে একটি কৌশল কেবল একটি সাধারণ চাল নয়; এটি হলো একটি ফাংশন $s_i(theta_i)$ যা যেকোনো টাইপের ক্ষেত্রে খেলোয়াড়ের সর্বোত্তম চাল নির্ধারণ করে।

একটি কৌশল প্রোফাইল s^* হলো **বায়েসিয়ান ন্যাশ সাম্যাবস্থা (BNE)** যদি প্রতিটি খেলোয়াড় তার নিজের জানা টাইপের প্রেক্ষিতে প্রতিপক্ষের সম্ভাব্য টাইপের চালের বিপরীতে প্রত্যাশিত উপযোগিতা সর্বোচ্চ করে:

$$sum_{theta_{-i}} p(theta_{-i} mid theta_i) u_i(s_i^*(theta_i), s_{-i}^*(theta_{-i})) ge sum_{theta_{-i}} p(theta_{-i} mid theta_i) u_i(a_i, s_{-i}^*(theta_{-i}))$$

আধুনিক অর্থনীতির ভিত্তি

হারসানিয়ির এই তত্ত্ব ছাড়া নিলামের কৌশল, শেয়ার বাজারের বাণিজ্য, বীমা চুক্তির ডিজাইন বা সাইবার নিরাপত্তার বিশ্লেষণ গাণিতিকভাবে সংজ্ঞায়িত করা অসম্ভব হতো।

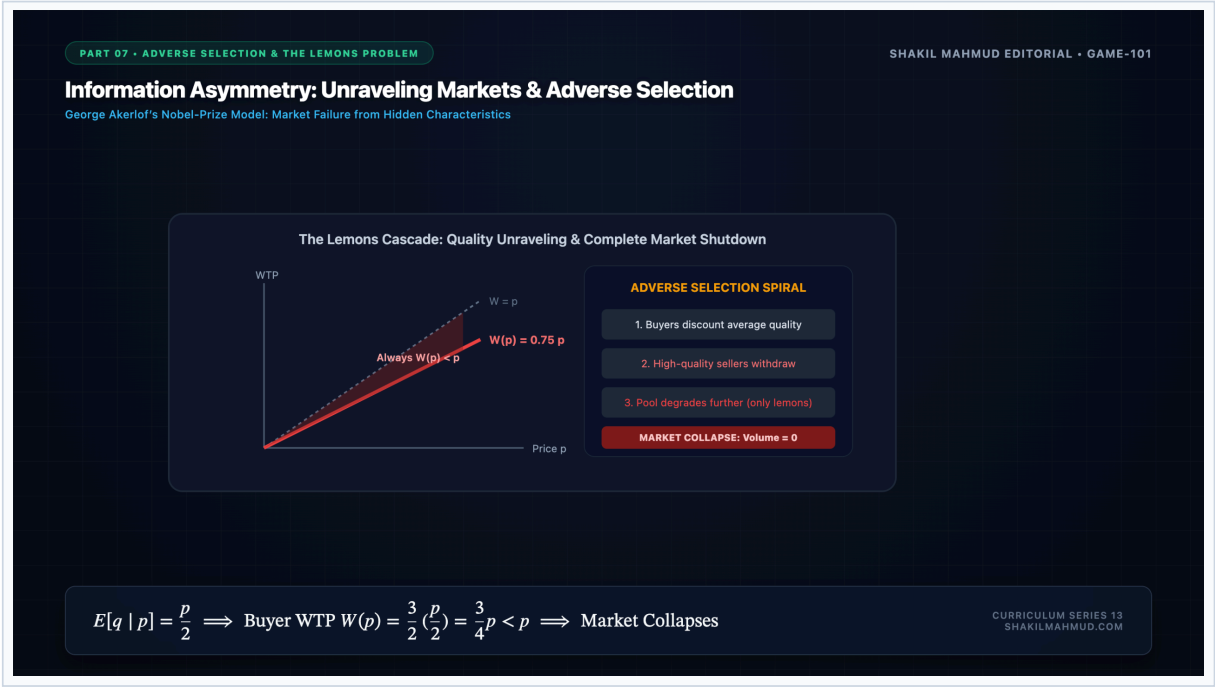
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "অসম্পূর্ণ তথ্য ও বায়েসিয়ান গেম — হারসানিয়ি টাইপ ও অনিশ্চয়তার রূপান্তর"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ৬।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-06-bayesian-games-incomplete-information-harsanyi-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • সপ্তম খণ্ড

তথ্যের অসামঞ্জস্য ও প্রতিকূল নির্বাচন — অ্যাকারলফের লেমনস মার্কেট পতন

তথ্যের অসামঞ্জস্য ও প্রতিকূল নির্বাচন — অ্যাকারলফের লেমনস মার্কেট পতন

418 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৭: *অ্যাকারলফের লেমনস মার্কেট মডেল, যেখানে প্রতিকূল নির্বাচন ও তথ্যের অসামঞ্জস্যতায় বাজার সম্পূর্ণ ভেঙে পড়ে।*

১৯৭০ সালে ক্যালিফোর্নিয়া বিশ্ববিদ্যালয় বার্কলির সহকারী অধ্যাপক জর্জ অ্যাকারলফ *আমেরিকান ইকোনমিক রিভিউ*-তে একটি সংক্ষিপ্ত গবেষণাপত্র জমা দেন। পর পর তিনটি খ্যাতনামা জার্নাল তা প্রত্যাখ্যান করে; সম্পাদকরা লিখেছিলেন যে অ্যাকারলফের যুক্তি সত্যি হলে পুঁজিবাদী বিশ্বে কোনো বাণিজ্য টিকতেই পারত না। অবশেষে যখন *কোয়ার্টার্লি জার্নাল অব ইকোনমিক্স* গবেষণাপত্রটি প্রকাশ করে—*“The Market for ‘Lemons’: Quality Uncertainty and the Market Mechanism”*—তখন অর্থনীতিতে এক মহাবিপ্লবের সূচনা হয়। অ্যাকারলফ প্রমাণ করেন যে ক্রেতার চেয়ে বিক্রেতার কাছে পণ্যের গুণমান সম্পর্কে বেশি তথ্য থাকলে অ্যাডাম স্মিথের শাস্ত্রীয় “অদৃশ্য হাত” কেবল হোঁচট খায় না—বরং তা পুরো বাজারকে আত্মঘাতী ধ্বংসের মুখে ঠেলে দিয়ে বাণিজ্য শূন্যে নামিয়ে আনতে পারে।

প্রতিকূল নির্বাচন (Adverse Selection)-এর স্বরূপ

পুরোনো গাড়ির বাজারের একটি উদাহরণ দেওয়া যাক, যেখানে দুই ধরনের গাড়ি রয়েছে: চমৎকার গাড়ি (“পীচ”) এবং ত্রুটিযুক্ত ভাঙাচোরা গাড়ি (“লেমন”)।

- বিক্রেতার কাছে লেমনের মূল্য ১,০০০ ডলার এবং পীচের মূল্য ২,০০০ ডলার।
- ক্রেতার কাছে লেমনের মূল্য ১,২০০ ডলার এবং পীচের মূল্য ২,৪০০ ডলার।

লক্ষ করুন, *প্রতিটি একক গাড়ির ক্ষেত্রে* বিক্রেতার চেয়ে ক্রেতার কাছে তার মূল্য বেশি। যদি পূর্ণ তথ্য থাকত, তবে দুটি আলাদা বাজার তৈরি হতো এবং সমাজে সর্বোচ্চ অর্থনৈতিক কল্যাণ নিশ্চিত হতো।

Shakil Mahmud • Research Monograph

তথ্যের অসামঞ্জস্যের বিপর্যয়

এখন তথ্যের অসামঞ্জস্য যোগ করা যাক: বিক্রেতা ঠিকই জানে তার গাড়িটি পীচ নাকি লেমন, কিন্তু ক্রেতা বাইরে থেকে চকচকে দেখে তা বুঝতে পারে না। ধরা যাক বাজারে ৫০% পীচ এবং ৫০% লেমন রয়েছে।

একজন যুক্তিশীল ক্রেতা কখনো না জেনে ২,৪০০ ডলার দিতে চাইবে না। সে গড়ে একটি প্রত্যাশিত মূল্য (Expected Value) দিতে রাজি হবে:

$$mathbbE[V] = ০.৫times১,২০০ + ০.৫times২,৪০০ = ১,৮০০textডলার$$

এখন ১,৮০০ ডলার বাজার মূল্যে বিক্রেতাদের আচরণ দেখুন:

- লেমনওয়ালা দারুণ খুশি: ১,০০০ ডলারের গাড়ি সে ১,৮০০ ডলারে বিক্রি করতে পারছে। ফলে সব লেমন বাজারে উপচে পড়বে।
- কিন্তু পীচের মালিকের কাছে তার গাড়ির মূল্য ২,০০০ ডলার। সে ১,৮০০ ডলারে বিক্রি করলে ২০০ ডলার লোকসান গুনবে। **ফলস্বরূপ পীচের মালিকরা তাদের ভালো গাড়ি বাজার থেকে সরিয়ে নেবে।**

বাজার পতনের আত্মঘাতী ঘূর্ণি

ক্রেতারা বোকা নয়; তারা দেখল বাজারে আর ভালো গাড়ি পাওয়া যাচ্ছে না। ফলে তারা মূল্য কমিয়ে ১,২০০ ডলার করল। এবার বাজারে শুধু লেমন বিক্রি হচ্ছে। খারাপ পণ্য ভালো পণ্যকে বাজার থেকে নিশ্চিহ্ন করে দিল।

অ্যাকারলফ প্রমাণ করলেন যে তথ্যের অসামঞ্জস্য থাকলে এমন পরিস্থিতি তৈরি হতে পারে যেখানে যেকোনো ধনাত্মক মূল্যে ক্রেতার কেনার ইচ্ছা মূল্যের চেয়ে কম হয় ($W(p) = frac{3}{4}p < p$)। এর ফলে বাজার ভেঙে পড়ে এবং মোট লেনদেন শূন্যে নেমে আসে।

বাস্তব জীবনে প্রভাব

অ্যাডভার্স সিলেকশন ব্যাখ্যা করে কেন ব্যক্তিগত স্বাস্থ্য বীমার বাজার ভেঙে পড়ে (অসুস্থ মানুষ বেশি বীমা কেনে, ফলে প্রিমিয়াম বেড়ে সুস্থ মানুষ বীমা ত্যাগ করে), এবং কেন ওয়ারেন্টি, রেটিং এজেন্সি ও ব্র্যান্ডের সুনাম আধুনিক বাণিজ্যের টিকে থাকার অপরিহার্য শর্ত।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "তথ্যের অসামঞ্জস্য ও প্রতিকূল নির্বাচন — অ্যাকারলফের লেমনস মার্কেট পতন"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ৭।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-07-adverse-selection-lemons-market-asymmetry-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • অষ্টম খণ্ড

ব্যয়বহুল সিগন্যালিং ও সিঙ্গেল-ক্রসিং শর্ত — মাইকেল স্পেন্সের জব মার্কেট মডেল

ব্যয়বহুল সিগন্যালিং ও সিঙ্গেল-ক্রসিং শর্ত — মাইকেল স্পেন্সের জব মার্কেট মডেল

443 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৮: *মাইকেল স্পেন্সের এডুকেশন সিগন্যালিং মডেল, সিঙ্গেল-ক্রসিং কার্ভ এবং সেপারেটিং ইকুইলিব্রিয়াম থ্রেশহোল্ড e^*।*

জর্জ অ্যাকারলফ যদি প্রমাণ করে থাকেন যে তথ্যের অসামঞ্জস্য বাজার ধ্বংস করতে পারে, তবে মানব সভ্যতা কীভাবে টিকে থাকে? একজন প্রতিভাবান সফটওয়্যার ইঞ্জিনিয়ার কীভাবে একজন সম্ভাব্য নিয়োগকর্তার কাছে নিজের বুদ্ধিমত্তা প্রমাণ করে? একজন ময়ূর কীভাবে ময়ূরীর কাছে নিজের বংশগত সক্ষমতা প্রমাণ করে? মুখের কথা সস্তা; যেকোনো প্রতারক মুখে নিজেকে মহাজ্ঞানী দাবি করতে পারে। ১৯৭৩ সালে মাইকেল স্পেন্স এক যুগান্তকারী গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন যা এই ধাঁধার সমাধান দেয়: *"Job Market Signaling"*। তথ্যের বিশাল শূন্যতার ওপারে সত্য প্রকাশ করতে হলে এমন একটি বার্তা পাঠাতে হবে যা **ব্যয়বহুল (Costly)**—এবং সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হলো, যা অনুকরণ করা প্রতারকদের পক্ষে অসম্ভব বা অতিমাত্রায় লোকসানজনক।

সস্তা কথার ফাঁদ বনাম শিক্ষাগত সিগন্যাল

ধরা যাক একটি কোম্পানি উচ্চ-দক্ষতাসম্পন্ন কর্মী ($theta_H$) খুঁজছে যার বার্ষিক মূল্য ১,০০,০০০ ডলার, আর নিম্ন-দক্ষতার কর্মীর ($theta_L$) মূল্য ৫০,০০০ ডলার। কোম্পানি যদি চাকরিপ্রার্থীদের জিজ্ঞেস করে "আপনারা কে কেমন দক্ষ?", তবে প্রতিটি অদক্ষ প্রার্থী নিজেকে দক্ষ দাবি করবে। মুখের কথার কোনো উৎপাদন খরচ নেই, তাই তা কোনো বিশ্বাসযোগ্যতা বহন করে না।

মাইকেল স্পেন্স দেখালেন যে প্রাতিষ্ঠানিক শিক্ষা মানব পুঁজি বৃদ্ধির বাইরে সম্পূর্ণ ভিন্ন একটি মৌলিক ভূমিকা পালন করে: বিশ্ববিদ্যালয় যদি কোনো ব্যবহারিক দক্ষতা *না-ও শেখায়*, তবুও তা একটি নিখুঁত বাছাইকরণ যন্ত্র হিসেবে কাজ করতে পারে।

সিঙ্গেল-ক্রসিং শর্ত (The Single-Crossing Property)

ধরা যাক শিক্ষা অর্জনের কষ্ট বা খরচ $c(e, theta)$ জন্মগত মেধার ওপর নির্ভরশীল। উচ্চ-মেধাবী প্রার্থীর জন্য কঠিন গাণিতিক সমীকরণ সমাধান করা বা রাত জেগে পড়াশোনা করার মানসিক খরচ নিম্ন-মেধাবীর চেয়ে অনেক কম:

Shakil Mahmud • Research Monograph

frac{partial c}{partial e}(e, theta_H) < frac{partial c}{partial e}(e, theta_L)

এটিকে বলা হয় **সিঙ্গেল-ক্রসিং শর্ত**। বেতন ও শিক্ষার রেখায় দুই ধরনের মানুষের পছন্দরেখা ঠিক একবার পরস্পরকে ছেদ করে।

সেপারেটিং সাম্যাবস্থা (Separating Equilibrium)

নিয়োগকর্তা এমন একটি নীতি ঘোষণা করলেন: যার ডিগ্রি বা শিক্ষার মান $egee^*$ থাকবে, তাকে ১,০০,০০০ ডলার বেতন দেওয়া হবে; আর যার থাকবে না, তাকে ৫০,০০০ ডলার দেওয়া হবে।

যেহেতু অদক্ষ কর্মীর জন্য এই ডিগ্রি অর্জনের কষ্ট ৫০,০০০ ডলারের অতিরিক্ত বেতনের চেয়ে অনেক বেশি, তাই সে নিজের ইচ্ছাতেই ডিগ্রি নেওয়া থেকে বিরত থাকে ($e = 0$)। পক্ষান্তরে উচ্চ-দক্ষ কর্মীর জন্য ডিগ্রি অর্জনের খরচ তুলনামূলক কম হওয়ায় সে স্বাচ্ছন্দ্যে ডিগ্রি অর্জন করে ($e = e^*$) এবং সর্বোচ্চ বেতন পায়। বাজার নিখুঁতভাবে সত্য ও মিথ্যার মধ্যে বিভাজন রেখা টেনে দেয়।

ময়ূরের লেজ থেকে বিটকয়েনের প্রুফ-অব-ওয়ার্ক

স্পেন্সের এই তত্ত্ব কেবল অর্থনীতির বিষয় নয়; এটি প্রকৃতির এক সর্বজনীন কৌশলগত নিয়ম:

- **জাহাভির হ্যান্ডিক্যাপ নীতি (1975):** ময়ূরের রঙিন ও ভারী লেজ ওড়ার ক্ষেত্রে বাধা সৃষ্টি করে এবং শিকারী প্রাণীর দৃষ্টি আকর্ষণ করে। তবুও ময়ূরী এই লেজ দেখে আকৃষ্ট হয়, কারণ এটি একটি অপরিবর্তনীয় বায়োলজিক্যাল সিগন্যাল: *“আমার জেনেটিক সক্ষমতা এতই উন্নত যে এত বড় বাধা নিয়েও আমি সুস্থভাবে বেঁচে আছি।”*
- **বিটকয়েন প্রুফ-অব-ওয়ার্ক:** একটি বেনামী ডিসট্রিবিউটেড নোড কীভাবে প্রমাণ করে যে তার ব্লকটি বৈধ? বিপুল পরিমাণ বিদ্যুৎ পুড়িয়ে গাণিতিক হিসাব সমাধানের মাধ্যমে। ডিজিটাল জগতে থার্মোডাইনামিক শক্তির ব্যয় হলো সত্যের চরম ও অকাট্য সিগন্যাল।

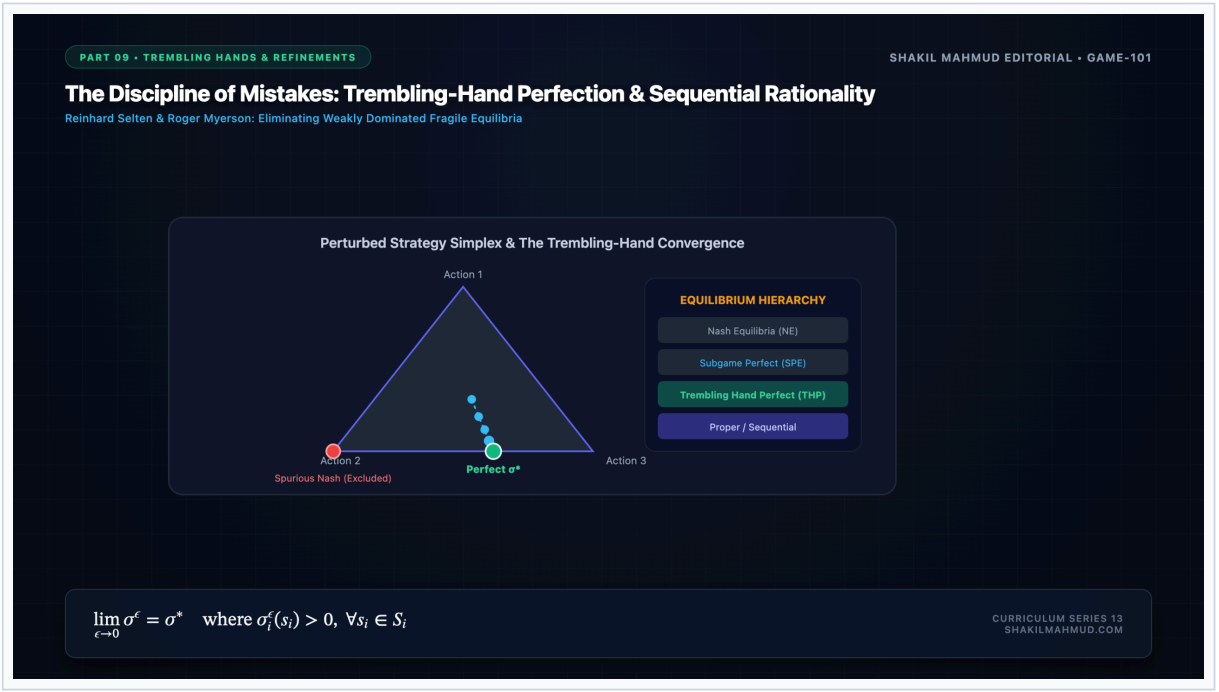
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ব্যয়বহুল সিগন্যালিং ও সিঙ্গেল-ক্রসিং শর্ত — মাইকেল স্পেন্সের জব মার্কেট মডেল"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ৮।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-08-costly-signaling-spence-single-crossing-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • নবম খণ্ড

ট্রেম্বলিং হ্যান্ডস ও ভারসাম্য পরিশোধন — ভুলের মাঝে সেল্টেনের গাণিতিক শৃঙ্খলা

ট্রেম্বলিং হ্যান্ডস ও ভারসাম্য পরিশোধন — ভুলের মাঝে সেল্টেনের গাণিতিক শৃঙ্খলা

379 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৯: *পার্টার্বড স্ট্র্যাটেজি সিমপ্লেক্স ও ট্রেম্বলিং-হ্যান্ড পারফেক্ট ইকুইলিব্রিয়াম, যেখানে ভুলের সম্ভাবনা শূন্যে পৌঁছায়।*

জন ন্যাশ প্রমাণ করেছিলেন যে প্রতিটি সসীম খেলায় একটি সাম্যাবস্থা থাকবেই, কিন্তু তিনি এটি প্রমাণ করেননি যে প্রতিটি সাম্যাবস্থা বাস্তব বুদ্ধিমত্তার মানদণ্ডে যুক্তিসঙ্গত হবে। বহু খেলায় একাধিক ন্যাশ সাম্যাবস্থা বিদ্যমান থাকে, যার মধ্যে কিছু সাম্যাবস্থা টিকে থাকে কেবল এই অলীক ধারণার ওপর যে প্রতিপক্ষ কখনোই সামান্যতম ভুল করবে না। কিন্তু বাস্তব পৃথিবী ও রোবটিক সিস্টেমে শতভাগ নির্ভুলতা একটি অলীক কল্পনা: মানুষের হাত কাঁপে, সফটওয়্যারে মহাজাগতিক রশ্মির প্রভাবে বিট ফ্লিপ হয়, এবং সিদ্ধান্ত গ্রহণে যেকোনো মুহূর্তে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র ত্রুটি ঘটতে পারে। ১৯৭৫ সালে রাইনহার্ড সেল্টেন গেম থিওরিতে এক যুগান্তকারী পরিশোধন আনেন: **ট্রেম্বলিং-হ্যান্ড পারফেকশন (Trembling-Hand Perfection)**। ভুলের বাস্তব সম্ভাবনাকে গণিতের ফ্রেমে আবদ্ধ করে তিনি গেম থিওরিকে দুর্বল ও অলীক ভারসাম্যের হাত থেকে রক্ষা করেন।

দুর্বল আধিপত্যের প্যাথলজি

একটি ২×২ খেলার কথা বিবেচনা করা যাক যেখানে ১ম খেলোয়াড়ের জন্য T চালটি B চালের ওপর দুর্বলভাবে প্রভাবশালী (Weakly Dominant)। অর্থাৎ, প্রতিপক্ষ L দিলে T তাকে ১ লাভ দেয় (যেখানে B দেয় ০), আর প্রতিপক্ষ R দিলে দুটি চালই ০ দেয়। এখানে (B, R) পেয়ারটি প্রযুক্তিগতভাবে একটি ন্যাশ সাম্যাবস্থা, কারণ প্রতিপক্ষ R খেললে ১ম খেলোয়াড় ০ বনাম ০-এর মধ্যে উদাসীন।

কিন্তু এই ভারসাম্যটি অত্যন্ত ভঙ্গুর। ১ম খেলোয়াড় কেন এমন একটি চাল দেবে যা কখনোই তাকে জেতাতে পারে না, বরং প্রতিপক্ষ যদি এক কোটিবারের মধ্যে একবারও ভুল করে L চালে চাপ দেয়, তবে সে নিশ্চিতভাবে ঠকবে? এই অবাস্তব সমাধান দূর করাই ছিল সেল্টেনের উদ্দেশ্য।

Shakil Mahmud • Research Monograph

পার্টার্বড গেম ও ভুলের সীমানা

সেল্টেন একটি **পার্টার্বড গেম** কল্পনা করলেন যেখানে খেলোয়াড় যে চাল দিতে চায়, হাত কেঁপে ওঠার কারণে ক্ষুদ্র সম্ভাবনা epsilon > ০-তে বিকল্প চালগুলোও অনাকাঙ্ক্ষিতভাবে ঘটে যায়:

sigma_i(a) ge epsilon_{ia} > 0

এর ফলে পুরো কৌশল সিমপ্লেক্সের ভেতর কোনো চালের সম্ভাবনাই পুরোপুরি শূন্য হতে পারে না। একটি কৌশল প্রোফাইল $sigma^*$ হবে **ট্রেম্বলিং-হ্যান্ড পারফেক্ট** যদি ভুলের মাত্রা ক্রমান্বয়ে শূন্যের কাছাকাছি নামিয়ে আনার পরেও ($epsilonto০$) সেই ভারসাম্যটি অক্ষুণ্ণ থাকে:

$$lim_{ktoinfty} sigma^k = sigma^*$$

আমাদের উদাহরণে, ২য় খেলোয়াড় যদি অতি ক্ষুদ্র সম্ভাবনা $epsilon$-এও ভুল করে L খেলে, তবে ১ম খেলোয়াড়ের জন্য T চালের প্রত্যাশিত আয় হবে epsilon times ১ > ০, যা B-এর (০) চেয়ে বেশি। ফলে সামান্যতম ভুলের বাতাসেও ভঙ্গুর সাম্যাবস্থা (B, R) ধসে যায় এবং একমাত্র শক্ত ভারসাম্য হিসেবে (T, L) টিকে থাকে।

ভারসাম্য পরিশোধনের দর্শন

একটি নিখুঁত কৌশলগত নীতি কেবল শূন্য-ভুলের জগতে কাজ করলেই চলে না; প্রতিপক্ষের সামান্যতম যান্ত্রিক বা মানবিক স্খলনের মুখেও যে নীতি নিজের বিজয় অক্ষুণ্ণ রাখে, একমাত্র সেটিই প্রকৃত সাম্যাবস্থা।



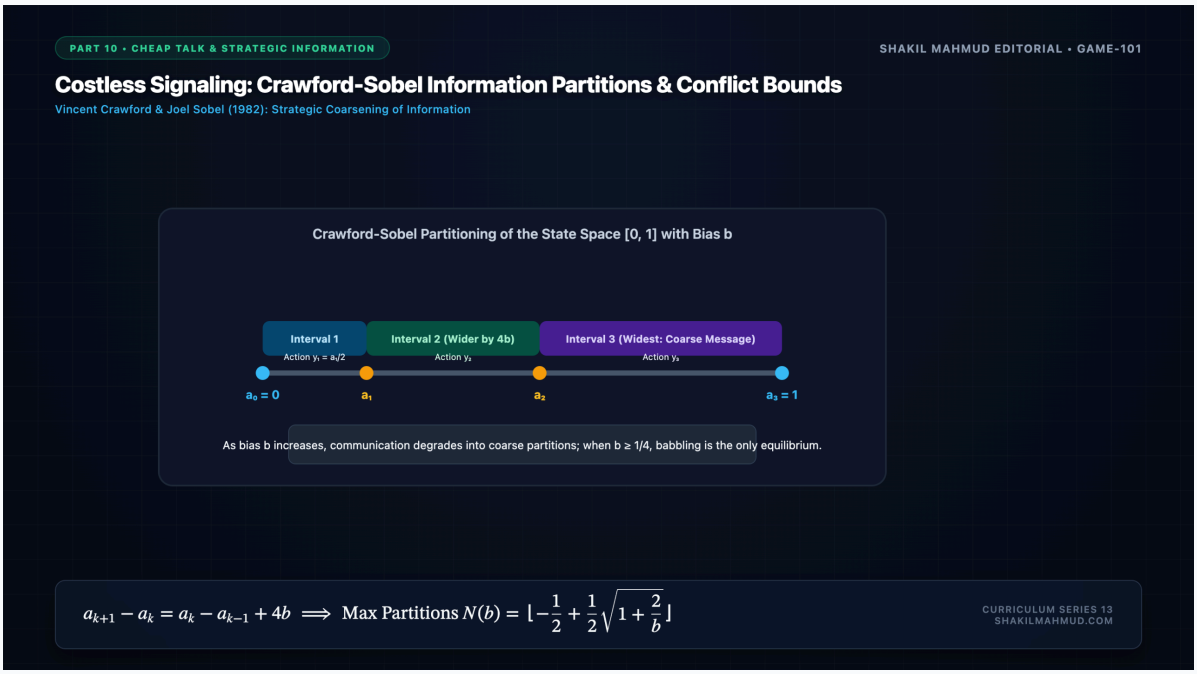
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ট্রেম্বলিং হ্যান্ডস ও ভারসাম্য পরিশোধন — ভুলের মাঝে সেল্টেনের গাণিতিক শৃঙ্খলা"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ৯।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-09-trembling-hand-perfection-refinements-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দশম খণ্ড

চিপ টক ও কৌশলগত তথ্য আদান-প্রদান — ক্রফোর্ড-সোবেল পার্টিশন ও কূটনৈতিক অস্পষ্টতা

চিপ টক ও কৌশলগত তথ্য আদান-প্রদান — ক্রফোর্ড-সোবেল পার্টিশন ও কূটনৈতিক অস্পষ্টতা

484 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১০: *ক্রফোর্ড-সোবেল পার্টিশন মডেল, যা স্ট্র্যাটেজিক চিপ টকে তথ্যের ইচ্ছাকৃত বিকৃতি ও অস্পষ্টতার পরিমাপ দেখায়।*

মাইকেল স্পেন্সের সিগন্যালিং মডেলে তথ্য প্রকাশের জন্য প্রয়োজন ছিল চড়া অর্থনৈতিক মূল্য: হাজার হাজার ডলারের টিউশন ফি, বছরের পর বছর অক্লান্ত পরিশ্রম কিংবা বিপুল আর্থিক ব্যয়। কিন্তু মানব ইতিহাসের কূটনীতি, কেন্দ্রীয় ব্যাংকের সুদের পূর্বাভাস, যুদ্ধের হটলাইন কিংবা ব্যবসায়িক আলোচনার টেবিলে মানুষের ভাষা সম্পূর্ণ **বিনা মূল্যের (Free)**। কথার কোনো উৎপাদন খরচ নেই। স্বার্থের সংঘাত থাকা সত্ত্বেও কি সম্পূর্ণ বিনে পয়সার মুখের কথা ("চিপ টক") কোনো খাঁটি গাণিতিক তথ্য বহন করতে পারে? ১৯৮২ সালে ভিনসেন্ট ক্রফোর্ড এবং জোয়েল সোবেল *ইকোনোমেট্রিকা* জার্নালে এক অবিস্মরণীয় গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন। তারা প্রমাণ করেন যে কোনো আইনি চুক্তি বা আর্থিক খরচ ছাড়াও সস্তা কথার মাধ্যমে কৌশলগত যোগাযোগ সম্ভব—তবে তা এক অনিবার্য গাণিতিক নিয়মের শিকার হয়: **তথ্যের ইচ্ছাকৃত স্থূলতা বা অস্পষ্টতা (Informational Coarsening)**।

ক্রফোর্ড-সোবেল চিপ টক মডেল

এই কাঠামোতে দুইজন অংশগ্রহণকারী থাকেন: একজন তথ্যজ্ঞাতা প্রেরক (S) এবং একজন সিদ্ধান্ত গ্রহণকারী প্রাপক (R):

1. **প্রকৃতির সত্য:** প্রকৃতি $[0, 1]$ ব্যবধি থেকে একটি সত্য মান $theta$ নির্ধারণ করে। এটি হতে পারে কোনো দেশের প্রকৃত সামরিক শক্তি বা কোনো কোম্পানির গোপন মুনাফা।
2. **প্রেরক:** প্রেরক সত্য $theta$ জানে, কিন্তু কোনো বাস্তব পদক্ষেপ নিতে পারে না। সে প্রাপককে একটি বিনে পয়সার বার্তা পাঠায়।
3. **প্রাপক:** প্রাপক $theta$ জানে না। সে বার্তা শুনে একটি বাস্তব পদক্ষেপ y গ্রহণ করে।
4. **স্বার্থের বিভাজন ও বায়াস b:** প্রাপক চায় সঠিক সত্যের সাথে পদক্ষেপ মেলাতে ($y = theta$)। কিন্তু প্রেরকের একটি পক্ষপাত বা বায়াস b > ০ রয়েছে—সে চায় প্রাপক সবসময় সত্যের চেয়ে b পরিমাণ বেশি চাল দিক ($y = theta + b$)।

Shakil Mahmud • Research Monograph

কেন সম্পূর্ণ সত্য প্রকাশ অসম্ভব?

প্রেরক কি কখনো নিখুঁত সত্য বলতে পারে? যদি প্রাপক বার্তা বিশ্বাস করে $y = m$ চাল দেয়, তবে প্রেরক সবসময় নিজের স্বার্থে বাড়িয়ে $m = theta + b$ বলবে। প্রাপক এটি আগে থেকেই জানে, ফলে সে কোনো সুনির্দিষ্ট দাবি বিশ্বাস করবে না। পুরোপুরি সত্য প্রকাশ গাণিতিকভাবে অসম্ভব।

পার্টিশন সাম্যাবস্থা ও তথ্যের অস্পষ্টতা

ক্রফোর্ড ও সোবেল প্রমাণ করলেন যে এই খেলায় সাম্যাবস্থা তৈরি হয় খণ্ডিত ব্যবধি বা **পার্টিশন (Interval Partitions)**-এর মাধ্যমে। পুরো $[০, ১]$ পরিসরকে কতগুলো ধাপে ভাগ করা হয়: ০ = a_0 < a_1 < a_2 < dots < a_N = ১।

- সত্য মান যদি $[a_{k-1}, a_k]$ ব্যবধির ভেতরে থাকে, প্রেরক একটি অস্পষ্ট বার্তা দেয়: *"মানটি a_{k-1} এবং a_k-এর মাঝামাঝি কোথাও আছে।"*
- প্রাপক এই অস্পষ্ট বার্তা শুনে সেই ব্যবধির গড় মান অনুযায়ী পদক্ষেপ নেয়।

প্রতিটি ব্যবধির প্রস্থ আগেরটির চেয়ে ঠিক $4b$ পরিমাণ বড় হয়:

$$a_{k+1} – a_k = a_k – a_{k-1} + 4b$$

এর অর্থ হলো, উচ্চতর মানে পৌঁছালে প্রেরকের অস্পষ্টতা ও মিথ্যাচারের ঝুঁকি এত বাড়ে যে বার্তাগুলো অত্যন্ত মোটা দাগের ও স্থূল হতে বাধ্য হয়।

কূটনীতির গাণিতিক নিয়তি

বায়াস b যত বাড়ে, সর্বোচ্চ পার্টিশন সংখ্যা $N(b)$ তত কমে যায়:

- যখন $bge১/৪$, তখন $N = ১$। এর অর্থ হলো কেবল **অর্থহীন প্রলাপ (Babbling Equilibrium)** সম্ভব। প্রেরকের কোনো কথারই আর কোনো অর্থ থাকে না, প্রাপক সবকিছু উপেক্ষা করে।

কূটনৈতিক অস্পষ্টতার দর্শন

ক্রফোর্ড-সোবেল প্রমাণ করেছেন যে কূটনীতিতে ব্যবহৃত দ্ব্যর্থবোধক ও অস্পষ্ট ভাষা কোনো ভাষাগত দুর্বলতা নয়; এটি এক অনিবার্য গাণিতিক বাধ্যবাধকতা। স্বার্থের সংঘাত থাকলে নিখুঁত স্পষ্টতা বিশ্বাসযোগ্যতা নষ্ট করে; নিয়ন্ত্রিত অস্পষ্টতাই হলো সত্যের একমাত্র বাহন।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "চিপ টক ও কৌশলগত তথ্য আদান-প্রদান — ক্রফোর্ড-সোবেল পার্টিশন ও কূটনৈতিক অস্পষ্টতা"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১০। https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-10-cheap-talk-crawford-sobel-partitions-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • একাদশ খণ্ড

বিবর্তনীয় গেম থিওরি ও ইএসএস — রেপ্লিকেটর গতিবিদ্যার জৈবিক ক্যালকুলাস

বিবর্তনীয় গেম থিওরি ও ইএসএস — রেপ্লিকেটর গতিবিদ্যার জৈবিক ক্যালকুলাস

468 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১১: *বিবর্তনীয় স্থিতিশীল কৌশল (ইএসএস) ও রেপ্লিকেটর গতিবিদ্যা, হক-ডোভ খেলায় অভ্যন্তরীণ আকর্ষণবিন্দু $x^* = V/C$।*

বহু দশক ধরে গেম থিওরি কাজ করছিল এই অনুমানের ওপর যে মানব খেলোয়াড়রা হলেন অসীম বুদ্ধিমত্তাসম্পন্ন গাণিতিক গণকযন্ত্র। কিন্তু ১৯৭৩ সালে এক বিমান প্রকৌশলী থেকে বিবর্তনীয় জীববিজ্ঞানী হওয়া জন মেনার্ড স্মিথ এবং জনসংখ্যা বংশগতিবিদ জর্জ আর. প্রাইস *নেচার* জার্নালে এক অবিস্মরণীয় গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন: *"The Logic of Animal Conflict"*। মেনার্ড স্মিথ অনুধাবন করেন যে গেম থিওরির কার্যকর হতে কোনো সচেতন চেতনা বা মানবিক বুদ্ধিমত্তার প্রয়োজন নেই। জীবজগতে **কৌশলগুলো জিনোমে কোড করা থাকে, পে-অফ পরিমাপ করা হয় ডারউইনীয় প্রজনন সাফল্যে (Fitness), আর সাম্যাবস্থার ইঞ্জিন হলো খোদ প্রাকৃতিক নির্বাচন**। এভাবেই জন্ম নেয় **বিবর্তনীয় গেম থিওরি (Evolutionary Game Theory)**।

হক-ডোভ খেলা: পশু রাজ্যের দ্বন্দ্ব

প্রকৃতিতে খাদ্যের উৎস, অঞ্চল বা সঙ্গীর মতো মূল্যবান জৈবিক সম্পদ V > ০ নিয়ে প্রতিযোগিতায় লিপ্ত একটি প্রাণী জনগোষ্ঠীর কথা ভাবা যাক। প্রতিটি প্রাণী দুটি জন্মগত আচরণের একটি প্রদর্শন করে:

- **হক (Hawk):** চরম আক্রমণাত্মক। সে রক্তক্ষয়ী লড়াই চালিয়ে যায় যতক্ষণ না নিজে আহত হয় বা প্রতিপক্ষ পালায়।
- **ডোভ (Dove):** অহিংস ও শান্তিপ্রিয়। সে ভয় দেখায়, কিন্তু প্রতিপক্ষ আক্রমণ করলে আঘাত না পেয়ে তৎক্ষণাৎ পালিয়ে যায়।

যদি দুটি ডোভের দেখা হয়, তবে তারা কোনো রক্তপাত ছাড়াই সম্পদ ভাগ করে ($V/২$)। কিন্তু একটি হক ও ডোভের দেখা হলে হক সম্পূর্ণ সম্পদ ছিনিয়ে নেয় (V), আর ডোভ পায় শূন্য (০)। আর যখন দুটি হকের দেখা হয়, তখন শুরু হয় প্রাণঘাতী সংঘাত: উভয়ের জয়ের সম্ভাবনা ৫০%, কিন্তু পরাজিতের মারাত্মক আঘাত পাওয়ার ক্ষতি C > ০। ফলে প্রত্যাশিত পে-অফ: (V – C)/২।

Shakil Mahmud • Research Monograph

বিবর্তনীয় স্থিতিশীল কৌশল (ESS)

ন্যাশ তত্ত্বে সাম্যাবস্থা হলো এমন এক অবস্থা যেখানে কোনো যুক্তিশীল মানুষ একা নিজের সিদ্ধান্ত বদলাতে চায় না। জীববিজ্ঞানে মেনার্ড স্মিথ সংজ্ঞায়িত করলেন **ইভোলিউশনারি স্টেবল স্ট্র্যাটেজি (ESS)**: এটি এমন একটি জিনগত আচরণগত বৈশিষ্ট্য যা একটি জনগোষ্ঠীর অধিকাংশ প্রাণী গ্রহণ করলে কোনো বিরল মিউট্যান্ট বৈশিষ্ট্য বাইরে থেকে এসে তাদের আক্রমণ বা প্রতিস্থাপন করতে পারে না।

হক-ডোভ সংকটের সমাধান

বাস্তব প্রকৃতিতে মারামারির শারীরিক ক্ষতি সম্পদের মূল্যের চেয়ে অনেক বেশি (C > V):

- সবাই যদি ডোভ হয়, তবে কি জনগোষ্ঠী স্থিতিশীল থাকবে? না! কারণ একটি মিউট্যান্ট হকের জন্ম হলে সে সমস্ত ডোভকে পরাজিত করে বিপুল প্রজনন সুবিধা পাবে এবং বিস্তার ঘটাবে।
- সবাই যদি হক হয়, তবে গড় পে-অফ হবে নেতিবাচক ((V – C)/২ < ০)। তখন একটি অহিংস ডোভ কোনো মারামারি না করে পালিয়েও হকের চেয়ে বেশি বংশবৃদ্ধি করবে!

ফলে বিশুদ্ধ কোনো প্রজাতি টিকে থাকতে পারে না। একমাত্র স্থিতিশীল ভারসাম্য বা ESS হলো একটি মিশ্র জনগোষ্ঠী যেখানে হকের অনুপাত ঠিক $x^* = fracVC$ হয়। মারামারির ঝুঁকি যত প্রাণঘাতী হয় ($CggV$), প্রকৃতিতে আগ্রাসী হকের অনুপাত তত কমে যায়।

রেপ্লিকেটর ডাইনামিক্স (Replicator Dynamics)

১৯৭৮ সালে পিটার টেলর এবং লিও জনকার গাণিতিক সমীকরণের মাধ্যমে দেখান কীভাবে প্রাকৃতিক নির্বাচনের প্রবাহে জিনের অনুপাত পরিবর্তিত হয়:

$$dot{x}_i = x_i left(f_i(x) – bar{f}(x) right)$$

কোনো কৌশল যদি জনগোষ্ঠীর গড় ফিটনেসের চেয়ে ভালো ফল দেয়, পরবর্তী প্রজন্মে তার জিনগত বিস্তার ঘটে; অন্যথায় তা বিলুপ্তির দিকে ধাবিত হয়। কোনো সচেতন চিন্তা ছাড়াই প্রাকৃতিক নির্বাচন এক মহাশক্তিশালী অপ্টিমাইজেশন অ্যালগরিদম হিসেবে জীবজগৎকে গেম থিওরির সাম্যাবস্থায় স্থিতিশীল রাখে।

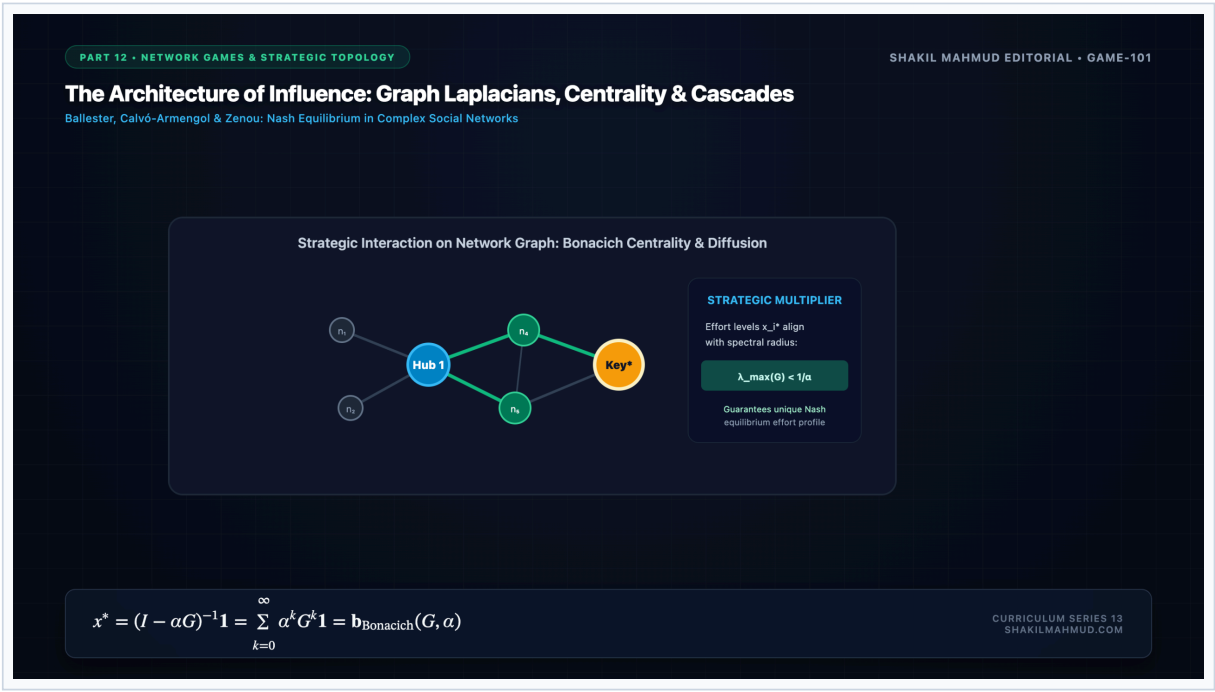
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "বিবর্তনীয় গেম থিওরি ও ইএসএস — রেপ্লিকেটর গতিবিদ্যার জৈবিক ক্যালকুলাস"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১১।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-11-evolutionary-game-theory-ess-replicator-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দ্বাদশ খণ্ড

নেটওয়ার্ক গেম ও স্ট্র্যাটেজিক টপোলজি — গ্রাফ ল্যাপ্লাসিয়ান ও বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি

নেটওয়ার্ক গেম ও স্ট্র্যাটেজিক টপোলজি — গ্রাফ ল্যাপ্লাসিয়ান ও বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি

456 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১২: *স্ট্র্যাটেজিক নেটওয়ার্ক মিথস্ক্রিয়া গ্রাফ, বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি ভেক্টর ও নেটওয়ার্ক মাল্টিপ্লায়ার প্রভাব।*

চিরায়ত গেম থিওরিতে খেলোয়াড়রা যেন এক শূন্যতার মধ্যে ক্রিয়াশীল: হয় সবাই একসাথে সবার বিরুদ্ধে খেলছে, নয়তো দুজন বিচ্ছিন্ন ব্যক্তি মুখোমুখি দ্বৈরথে নামছে। কিন্তু বাস্তব মানব সভ্যতা, আর্থিক বাজার এবং ডিজিটাল তথ্যকাঠামোতে কৌশলগত এজেন্টরা আবদ্ধ থাকে **জটিল নেটওয়ার্কের (Complex Networks)** মাঝে। একটি আন্তর্জাতিক ব্যাংক পুরো বিশ্বের সাথে সরাসরি লেনদেন করে না; সে ঋণ আদান-প্রদান করে নির্দিষ্ট কিছু প্রতিপক্ষ ব্যাংকের সাথে। একজন সাধারণ মানুষ অপারেটিং সিস্টেম নির্বাচনের আগে গোটা দুনিয়ার ভোট নেয় না; সে প্রভাবিত হয় তার নিকটস্থ বন্ধুদের সামাজিক নেটওয়ার্ক দ্বারা। ২০০৬ সালে কোরালিও ব্যালেস্টার, আন্তোনি কালভো-আরমেনগোল এবং ইভ জেনু *ইকোনোমেট্রিকা* জার্নালে এক অবিস্মরণীয় গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন: *“Who’s Who in Networks. Wanted: The Key Player”*। তারা প্রমাণ করেন যে কোনো নেটওয়ার্কে আত্মস্বার্থপর এজেন্টদের অনন্য ন্যাশ সাম্যাবস্থা সরাসরি স্পেকট্রাল গ্রাফ থিওরি এবং **বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি (Bonacich Centrality)**-র সমতুল্য।

নেটওয়ার্ক গেমের গাণিতিক কাঠামো

ধরা যাক একটি গ্রাফ $G = (V, E)$, যার সংযোগগুলো অ্যাডজাসেন্সি ম্যাট্রিক্স $A = [g_{ij}]$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। প্রতিটি এজেন্ট i একটি নির্দিষ্ট কৌশলগত প্রচেষ্টার মাত্রা $x_i ge 0$ নির্ধারণ করে (যেমন গবেষণায় বিনিয়োগ, নতুন প্রযুক্তি গ্রহণ বা লেখাপড়ায় শ্রম)। এজেন্টের উপযোগিতায় সহকর্মীদের ইতিবাচক প্রভাব (Strategic Complementarities) এবং ব্যক্তিগত শ্রমের দ্বিঘাত খরচ অন্তর্ভুক্ত থাকে:

u_i = alpha_i x_i – frac{1}{2} x_i^2 + beta sum_{j=1}^n g_{ij} x_i x_j

এখানে beta > 0 হলো কৌশলগত পরিপূরকতার মাত্রা: যদি আমার কোনো প্রতিবেশী তার প্রচেষ্টা বাড়ায় ($x_j uparrow$), তবে স্বয়ংক্রিয়ভাবে আমারও প্রচেষ্টা বাড়ানোর প্রান্তিক মুনাফা বৃদ্ধি পায়।

Shakil Mahmud • Research Monograph

ম্যাট্রিক্স ইনভার্সন ও ন্যাশ সাম্যাবস্থা

প্রথম অন্তরক বা ফার্স্ট-অর্ডার কন্ডিশন ($fracpartialu_ipartialx_i = ০$) প্রয়োগ করলে দেখা যায়:

x_i = alpha_i + beta sum_{j=1}^n g_{ij} x_j implies (I – beta G) mathbf{x} = boldsymbol{alpha}

যদি নেটওয়ার্কের সর্বোচ্চ আইগেনভ্যালু lambda_{max}(G) < ১/beta শর্ত পূরণ করে, তবে নিউম্যান পাওয়ার সিরিজ ব্যবহার করে ম্যাট্রিক্সটি ইনভার্ট করা যায়:

mathbf{x}^* = (I – beta G)^{-1} boldsymbol{alpha} = sum_{k=0}^infty beta^k G^k boldsymbol{alpha}

বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি: পথের জ্যামিতি

এই ধারার দিকে তাকান: G^k হলো গ্রাফে নোড i থেকে নোড j-এর মধ্যে ঠিক k-দৈর্ঘ্যের মোট পথের সংখ্যা! $beta^k$ দীর্ঘ পথগুলোর প্রভাব সূচকীয় হারে কমিয়ে দেয়। যখন প্রাথমিক প্রণোদনা সমান ($boldsymbolalpha = mathbf১$), তখন প্রতিটি খেলোয়াড়ের সর্বোত্তম প্রচেষ্টা সরাসরি **কাটজ-বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি**-র সমান হয়।

একজন খেলোয়াড়ের সর্বোত্তম কৌশল কেবল তার সরাসরি বন্ধুর সংখ্যার ওপর নির্ভর করে না। এটি নির্ভর করে তার বন্ধুদের বন্ধুরা কতটা সংযুক্ত, তাদের বন্ধুদের বন্ধুরা কতটা সক্রিয়—এভাবে পুরো নেটওয়ার্কের অন্তহীন পথের ওপর।

কি-প্লেয়ার (Key Player) সমস্যা ও সিস্টেমিক ঝুঁকি

ব্যালেস্টার এবং তার সহকর্মীরা একটি অত্যন্ত বাস্তব সমস্যার সমাধান করলেন: কোনো নেটওয়ার্কের সামগ্রিক অপরাধ কমাতে চাইলে বা আর্থিক ধস ঠেকাতে চাইলে কোন নির্দিষ্ট নোডটিকে বিচ্ছিন্ন করা সবচেয়ে কার্যকর?

তারা প্রমাণ করলেন যে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ নোড কেবল সবচেয়ে বেশি বন্ধু থাকা নোডটি নয়। বরং এটি হলো **কি-প্লেয়ার ইনডেক্স** সর্বোচ্চকারী নোড, যা নিজের কানেক্টিভিটি এবং নেটওয়ার্কের অভ্যন্তরীণ ফিডব্যাক লুপের অনুপাতের ওপর নির্ভর করে। এই সমীকরণটি আজ আন্তর্জাতিক ব্যাংকিংয়ে সিস্টেমিক ঝুঁকি নিয়ন্ত্রণ (Basel III নিয়মাবলী) এবং মহামারীতে টিকাদান ও কোয়ারেন্টাইন নীতি প্রণয়নে বিশ্বজুড়ে ব্যবহৃত হয়।

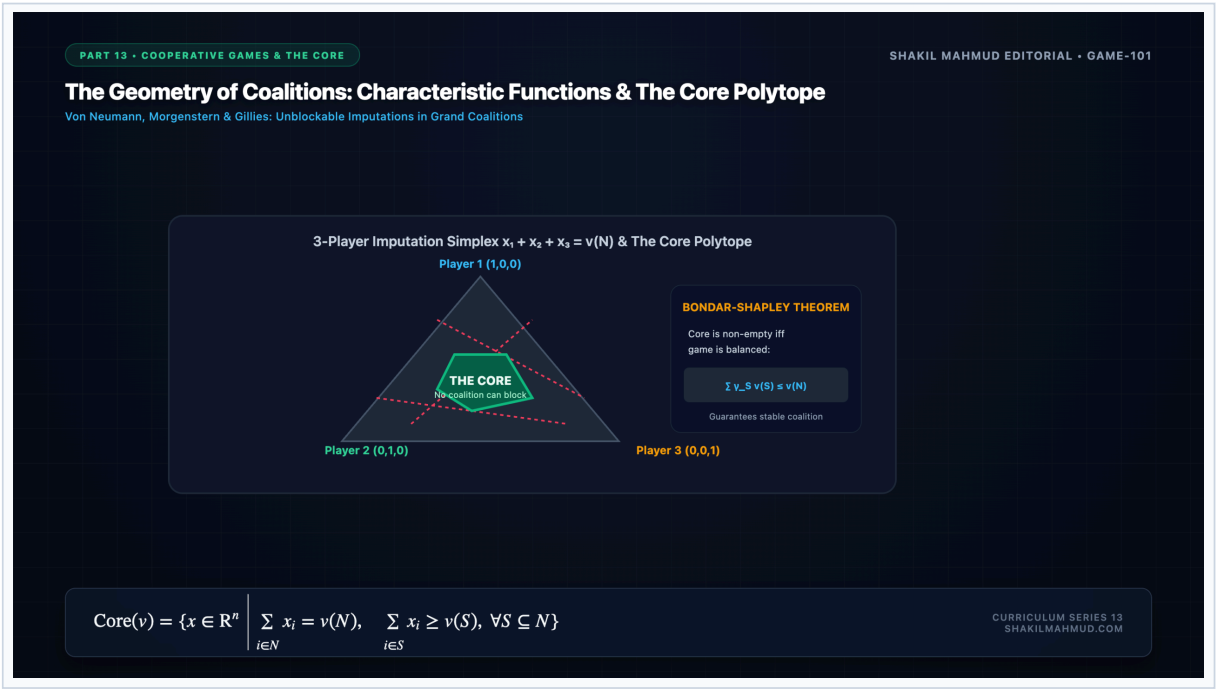
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "নেটওয়ার্ক গেম ও স্ট্র্যাটেজিক টপোলজি — গ্রাফ ল্যাপ্লাসিয়ান ও বোনাচিচ সেন্ট্রালিটি"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১২।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-12-network-games-graph-laplacians-centrality-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ত্রয়োদশ খণ্ড

কোঅপারেটিভ গেম ও দ্য কোর — বৈশিষ্ট্যমূলক ফাংশন ও জোটগত স্থায়িত্ব

কোঅপারেটিভ গেম ও দ্য কোর — বৈশিষ্ট্যমূলক ফাংশন ও জোটগত স্থায়িত্ব

413 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৩: *তিন-খেলোয়াড়ের ইমপিউটেশন সিমপ্লেক্স ও কোর পলিটোপ, যা কোনো জোট দ্বারা অবরুদ্ধ না হওয়া সুষম বণ্টন।*

নন-কোঅপারেটিভ গেম থিওরিতে স্বতন্ত্র খেলোয়াড়রা বিচ্ছিন্নভাবে নিজেদের স্বার্থে চাল দেয়, তাদের মাঝে কোনো আইনত বাধ্যতামূলক চুক্তি করার সুযোগ থাকে না। কিন্তু মানব ইতিহাস, বৈশ্বিক অর্থনীতি এবং রাজনীতির পরতে পরতে মানুষ জোট, ট্রেড ইউনিয়ন, ব্যবসায়িক কার্টেল এবং সার্বভৌম ফেডারেশন গঠন করে: ওপেক (OPEC) তেলের উৎপাদন সমন্বয় করে; সার্বভৌম রাষ্ট্রগুলো যৌথ সামরিক জোট (ন্যাটো) গঠন করে। খেলোয়াড়রা যখন আইনত বা কোডের মাধ্যমে বাধ্যতামূলক চুক্তি করতে পারে, তখন কৌশলগত প্রশ্নটি আমূল বদলে যায়: **একটি যৌথ জোট দ্বারা উৎপাদিত মোট সম্পদ কীভাবে বণ্টন করলে কোনো উপ-দল বা ভগ্নাংশ দল বিদ্রোহ করে বের হয়ে যাওয়ার প্রণোদনা পাবে না?** এটিই হলো **কোঅপারেটিভ গেম থিওরি (Cooperative Game Theory)** এবং **দ্য কোর (The Core)**-এর জ্যামিতিক জগৎ।

বৈশিষ্ট্যমূলক ফাংশন ও ট্রান্সফারেবল ইউটিলিটি

ট্রান্সফারেবল ইউটিলিটিযুক্ত একটি কোঅপারেটিভ খেলা (N, v) দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, যেখানে N হলো খেলোয়াড়দের সেট এবং $v(S)$ হলো একটি কোয়ালিশন বা জোট S-এর অর্জিত মোট অর্থনৈতিক মূল্য।

অধিকাংশ অর্থনৈতিক পরিস্থিতিতে **সুপার-অ্যাডিটিভিটি (Superadditivity)** বিদ্যমান থাকে: দুটি আলাদা জোট এক হলে তাদের যৌথ উৎপাদন কখনোই তাদের পৃথক উৎপাদনের যোগফলের চেয়ে কম হতে পারে না $(v(ScupT)gev(S)+v(T))$। এর ফলে সমাজের সবার সমন্বয়ে গঠিত *গ্র্যান্ড কোয়ালিশন (Grand Coalition)* N-এ মোট সম্পদ সর্বোচ্চ হয় $(v(N))$। মূল প্রশ্ন হলো: এই সম্পদ কীভাবে ভাগ করা উচিত?

Shakil Mahmud • Research Monograph

কোর (The Core)-এর সংজ্ঞা

একটি বণ্টন ভেক্টর $x = (x_1, dots, x_n)$ হলো মোট সম্পদের বণ্টন। যদি কোনো উপ-জোট S দেখে যে জোটবদ্ধ হয়ে তারা $v(S)$ অর্জন করতে পারে যা তাদের প্রস্তাবিত বণ্টনের যোগফল $sum_{iin S} x_i$-এর চেয়ে বেশি, তবে তারা এই বণ্টন প্রত্যাখ্যান করে **ব্লক (Block)** করবে এবং গ্র্যান্ড কোয়ালিশন ভেঙে দেবে।

দ্য কোর হলো সেই সকল বণ্টনের সেট যাকে কোনো জোটই কখনো ব্লক করতে পারে না:

$$textCore(v) = left{x in mathbb{R}^n ; middle| ; sum_{iin N} x_i = v(N) quad textএবং quad sum_{iin S} x_i ge v(S), ; forall S subseteq N right}$$

জ্যামিতিকভাবে কোর হলো একটি উত্তল পলিটোপ (Convex Polytope)। কোরে থাকা যেকোনো বণ্টন হলো একটি স্থায়ী রাজনৈতিক ও অর্থনৈতিক ভারসাম্য—কোনো বিদ্রোহী পক্ষই সেখান থেকে বের হয়ে ভালো থাকার কোনো বাস্তবসম্মত হুমকি দিতে পারে না।

বনদারেভা-শ্যাপলে উপপাদ্য: কোর কখন বিদ্যমান থাকে?

সব খেলায় কি কোর বিদ্যমান থাকে? আশ্চর্যজনকভাবে উত্তর হলো: না। সাধারণ সংখ্যাগরিষ্ঠ ভোটের খেলায় যেখানে তিনজন ১০০ ডলার ভাগাভাগি করে, সেখানে কোর সম্পূর্ণ **শূন্য**! যেকোনো দুইজনের চুক্তিকে তৃতীয়জন এসে অপর একজনকে বেশি দিয়ে ভেঙে ফেলতে পারে।

১৯৬৩ সালে ওলগা বনদারেভা এবং লয়েড শ্যাপলে স্বাধীনভাবে প্রমাণ করেন যে একটি কোঅপারেটিভ খেলায় কোর বিদ্যমান থাকার একমাত্র ও অপরিহার্য শর্ত হলো খেলাটিকে **ব্যালান্সড (Balanced)** হতে হবে। লিনিয়ার প্রোগ্রামিং ডুয়ালিটির ওপর প্রতিষ্ঠিত এই উপপাদ্যটি আধুনিক অর্থনীতিতে রিসোর্স পুলিং ও জোট গঠনের পরম ভিত্তিপ্রস্তর।

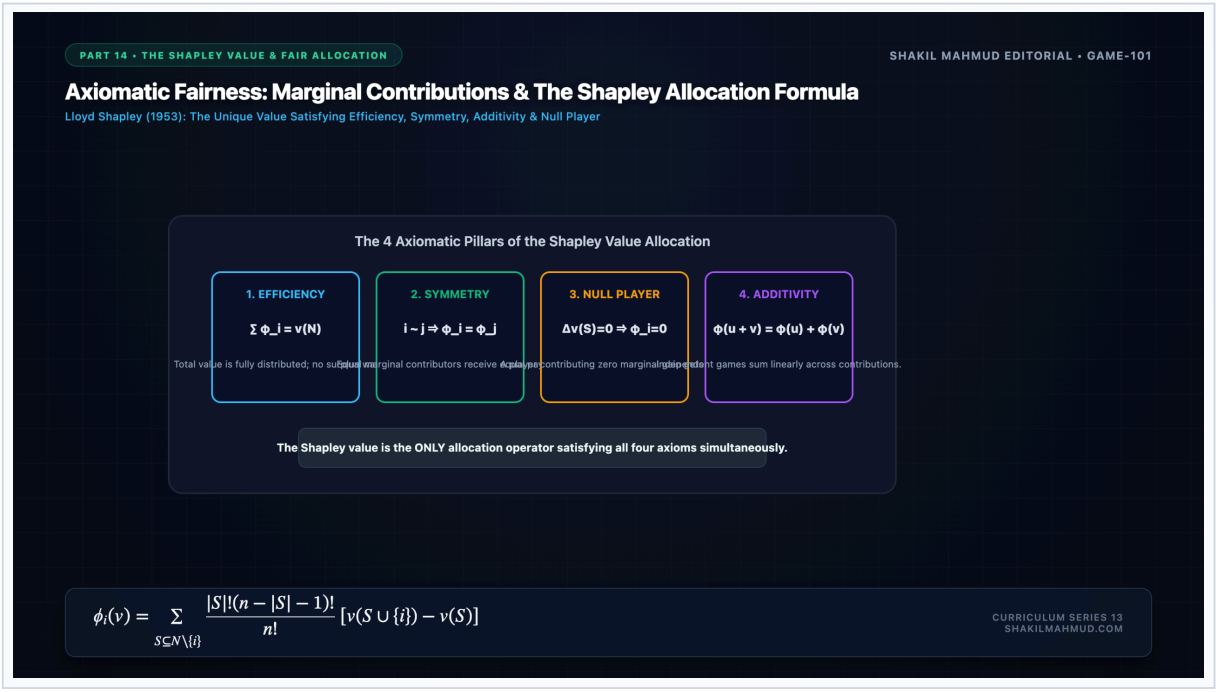
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "কোঅপারেটিভ গেম ও দ্য কোর — বৈশিষ্ট্যমূলক ফাংশন ও জোটগত স্থায়িত্ব"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১৩।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-13-cooperative-games-core-polytope-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • চতুর্দশ খণ্ড

দ্য শ্যাপলে ভ্যালু ও ন্যায্য বণ্টন — ন্যায়বিচারের গাণিতিক স্বতঃসিদ্ধ

দ্য শ্যাপলে ভ্যালু ও ন্যায্য বণ্টন — ন্যায়বিচারের গাণিতিক স্বতঃসিদ্ধ

428 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৪: *শ্যাপলে ভ্যালুর চারটি মৌলিক স্বতঃসিদ্ধ স্তম্ভ: দক্ষতা, প্রতিসাম্য, নিষ্ক্রিয় খেলোয়াড় এবং যোজনযোগ্যতা।*

কোঅপারেটিভ গেমসে “দ্য কোর” জোটগত স্থায়িত্বের এক অনন্য ধারণা হলেও এর দুটি বড় সীমাবদ্ধতা রয়েছে: বহু ক্ষেত্রে কোর সম্পূর্ণ খালি থাকে, আবার অনেক ক্ষেত্রে কোরের ভেতর অসংখ্য সমাধান থাকে যার মধ্যে কোনটি নৈতিক, দার্শনিক বা অর্থনৈতিকভাবে *ন্যায়সঙ্গত (Fair)* তা কোর বলতে পারে না। ধরা যাক কয়েকটি এয়ারলাইন্স মিলে একটি নতুন রানওয়ে তৈরি করবে; কার কত টাকা দেওয়া উচিত? একটি দলীয় গবেষণায় একটি জীবনরক্ষাকারী ওষুধের পেটেন্ট আবিষ্কৃত হলো; কোন বিজ্ঞানীর লভ্যাংশের ভাগ কত হওয়া উচিত? ১৯৫৩ সালে উনত্রিশ বছর বয়সী গণিতবিদ লয়েড শ্যাপলে মাত্র পাঁচ পৃষ্ঠার একটি গবেষণাপত্রে এই ঐতিহাসিক সমস্যার নিখুঁত ও চূড়ান্ত সমাধান দেন: **দ্য শ্যাপলে ভ্যালু (The Shapley Value)**।

ন্যায্যতার চারটি স্বতঃসিদ্ধ স্তম্ভ

লয়েড শ্যাপলে কোনো মনস্তাত্ত্বিক অনুমানের ওপর নির্ভর না করে চারটি অবিসংবাদিত ন্যায়নীতির স্বতঃসিদ্ধ (Axioms) দাঁড় করালেন:

1. **দক্ষতা (Efficiency):** $sumphi_i = v(N)$। গ্র্যান্ড কোয়ালিশনের উৎপাদিত মোট সম্পদ পুরোপুরি বণ্টিত হতে হবে; কোনো অংশ অপচয় বা অবণ্টিত রাখা যাবে না।
2. **প্রতিসাম্য (Symmetry):** দুজন খেলোয়াড় যদি প্রতিটি সম্ভাব্য জোটে সমান অবদান রাখে, তবে তাদের প্রাপ্ত আয়ও সম্পূর্ণ সমান হতে হবে। কোনো পক্ষপাত চলবে না।
3. **নিষ্ক্রিয় খেলোয়াড় (Null Player):** কোনো খেলোয়াড় যদি কোনো জোটে কোনো অতিরিক্ত মূল্য যোগ করতে না পারে, তবে সে কোনো লভ্যাংশ পাবে না ($phi_i = 0$)।
4. **যোজনযোগ্যতা (Additivity):** দুটি স্বাধীন খেলা একসাথে যুক্ত হলে মোট বণ্টন হবে পৃথক বণ্টনের যোগফলের সমান ($phi(u + w) = phi(u) + phi(w)$)।

Shakil Mahmud • Research Monograph

শ্যাপলে ভ্যালুর মূল সূত্র

লয়েড শ্যাপলে প্রমাণ করলেন যে **এই চারটি স্বতঃসিদ্ধকে একসাথে পূরণ করতে পারে এমন ঠিক একটিমাত্র গাণিতিক অপারেটর মহাবিশ্বে বিদ্যমান**। সেই সূত্রটি হলো সকল সম্ভাব্য পারমিউটেশনে একজন খেলোয়াড়ের প্রান্তিক অবদানের প্রত্যাশিত গড়:

phi_i(v) = sum_{S subseteq N setminus {i}} frac{|S|! (n – |S| – 1)!}{n!} left[v(S cup {i}) – v(S) right]

এর চমৎকার সমন্বয় তত্ত্বটি অনুধাবন করুন:

- ধরা যাক n জন খেলোয়াড় এলোমেলো ক্রমে একে একে ঘরে প্রবেশ করছে। তাদের আসার মোট সম্ভাব্য ক্রম হলো $n!$ টি।
- খেলোয়াড় i যখন ঘরে ঢোকে, সে তার পূর্বে উপস্থিত জোট S-এ যুক্ত হয় এবং তার আগমনের ফলে জোটে নতুন সম্পদ যোগ হয় [v(S cup {i}) – v(S)]।
- সকল সম্ভাব্য ক্রমের ওপর এই প্রান্তিক অবদানের গড় হিসাব করাই হলো শ্যাপলে ভ্যালু।

আধুনিক প্রয়োগ: রানওয়ের খরচ বণ্টন থেকে এক্সপ্লেইনেবল এআই

শ্যাপলে ভ্যালু আজ বিশুদ্ধ গণিতের গণ্ডি পেরিয়ে আধুনিক প্রকৌশল ও কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তার অন্যতম প্রধান ভিত্তি:

- **বিমানবন্দরের রানওয়ের মূল্য নির্ধারণ:** ছোট বিমান, মাঝারি জেট ও জাম্বো জেটের যৌথ রানওয়ে নির্মাণের খরচ নির্ধারণের জন্য শ্যাপলে মডেল বিশ্বজুড়ে স্বীকৃত।
- **জাতিসংঘের ভোটাধিকার বিশ্লেষণ:** নিরাপত্তা পরিষদে ভেটো ক্ষমতার প্রকৃত রাজনৈতিক প্রভাব পরিমাপে শ্যাপলে-শুবিক ইনডেক্স ব্যবহৃত হয়।
- **মেশিন লার্নিংয়ে SHAP ব্যাখ্যা:** একটি ডিপ নিউরাল নেটওয়ার্ক কোনো রোগীর রোগের পূর্বাভাস দিলে কোন ইনপুট প্যারামিটার কতটুকু দায়ী, তা পরিমাপের জন্য শ্যাপলে ভ্যালু ব্যবহৃত হয়, যা বর্তমানে Explainable AI (XAI)-এর বৈশ্বিক গোল্ড স্ট্যান্ডার্ড।

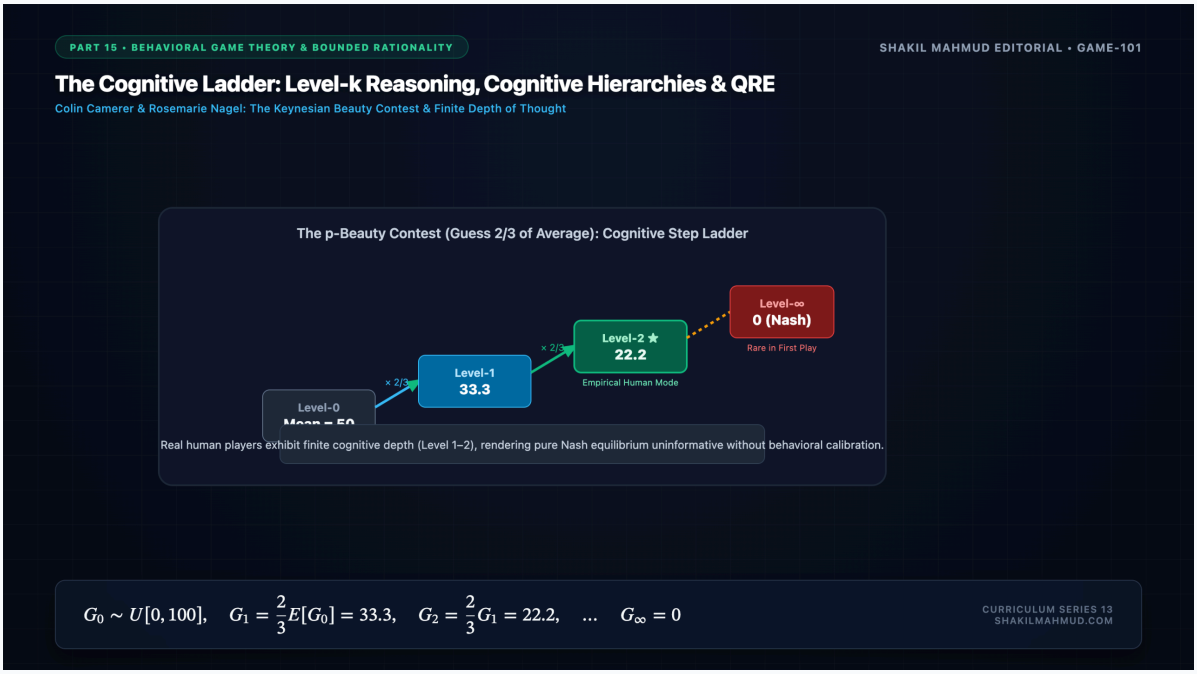
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "দ্য শ্যাপলে ভ্যালু ও ন্যায্য বণ্টন — ন্যায়বিচারের গাণিতিক স্বতঃসিদ্ধ"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১৪।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-14-shapley-value-axiomatic-fairness-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • পঞ্চদশ খণ্ড

আচরণগত গেম থিওরি ও সীমাবদ্ধ যৌক্তিকতা — লেভেল-k কগনিটিভ হায়ারার্কি

আচরণগত গেম থিওরি ও সীমাবদ্ধ যৌক্তিকতা — লেভেল-k কগনিটিভ হায়ারার্কি

432 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৫: *পি-বিউটি কনটেস্ট কগনিটিভ ল্যাডার, লেভেল-০, লেভেল-১, মানুষের বাস্তব আচরণগত লেভেল-২ এবং তাত্ত্বিক ন্যাশ সাম্যাবস্থা।*

চিরায়ত গেম থিওরিতে খেলোয়াড়দের এক অলীক অতি-বুদ্ধিমত্তার অধিকারী বলে ধরে নেওয়া হয়: তাদের চিন্তা করার ক্ষমতা অসীম, তারা মুহূর্তে জটিল ফিক্সড পয়েন্ট বের করে ফেলতে পারে এবং তারা বিশ্বাস করে পৃথিবীর প্রতিটি মানুষও অবিকল একই গাণিতিক নিখুঁত ভাবনায় মগ্ন। কিন্তু বাস্তব মানুষের ওপর ল্যাবরেটরিতে পরীক্ষা চালালে বিশুদ্ধ ন্যাশ সাম্যাবস্থার ভবিষ্যদ্বাণী অধিকাংশ ক্ষেত্রে ভেঙে পড়ে। রক্ত-মাংসের মানুষের মনোযোগের সীমাবদ্ধতা আছে, আবেগের প্রভাব আছে এবং তাদের চিন্তা করার ক্ষমতা সসীম। ১৯৯০-এর দশকের শেষভাগে কলিন ক্যামেরার এবং রোজমেরি নাগেলের মতো গবেষকরা সূচনা করেন **আচরণগত গেম থিওরি (Behavioral Game Theory)**। মনোবিজ্ঞান ও গণিতের সমন্বয়ে তারা উন্মোচন করেন মানুষের আসল কৌশলগত চিন্তার সিঁড়ি: **কগনিটিভ হায়ারার্কি (Cognitive Hierarchy)**।

কেইনসীয় বিউটি কনটেস্ট (The p-Beauty Contest)

জন মেনার্ড কেইনসের শেয়ার বাজারের বিনিয়োগকারী মনস্তত্ত্বের ওপর ভিত্তি করে এই বিখ্যাত খেলাটির নিয়ম অত্যন্ত সরল:

একটি ঘরে অনেক মানুষকে ০ থেকে ১০০-এর মধ্যে যেকোনো একটি পূর্ণসংখ্যা বেছে নিতে বলা হয়। যে ব্যক্তির সংখ্যাটি সবার সংখ্যার **গড়ের দুই-তৃতীয়াংশ** ($২/৩ timestext Average$)-এর সবচেয়ে কাছাকাছি হবে, সে-ই একমাত্র বিজয়ী হবে।

তাত্ত্বিক ন্যাশ যুক্তির শূন্যতা

একজন চরম যুক্তিশীল গণিতবিদ কীভাবে চিন্তা করবেন?

- সবাই যদি সবচেয়ে বড় সংখ্যা ১০০-ও বেছে নেয়, তবে গড় হবে ১০০ এবং তার দুই-তৃতীয়াংশ হবে ৬৭। ফলে ৬৭-এর বেশি কোনো সংখ্যা বাছা চরম বোকামি।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- সবাই যেহেতু এটি জানে, তাই সর্বোচ্চ গড় হতে পারে ৬৭, যার দুই-তৃতীয়াংশ হলো ৪৪।
- এই যুক্তি ক্রমান্বয়ে কমাতে থাকলে: ৪৪ to ৩০ to ২০ to ১৩ $todotsto$০।

বিশুদ্ধ গাণিতিক ন্যাশ সাম্যাবস্থার সিদ্ধান্ত হলো: **সবার ০ বেছে নেওয়া উচিত**!

বাস্তব মানুষের কগনিটিভ সিঁড়ি

কিন্তু বাস্তব মানুষের ওপর পরীক্ষা চালালে দেখা যায় প্রায় কেউই ০ বেছে নেয় না। এমনকি যে গণিতবিদ নিখুঁত ন্যাশ মেনে ০ বেছে নেন, তিনি নিশ্চিতভাবে পরাজিত হন! কারণ বাস্তব মানুষের চিন্তায় বিভিন্ন স্তর বা লেভেল দেখা যায়:

- **লেভেল-০ (L_0):** যারা কোনো জটিল চিন্তা না করে ০ থেকে ১০০-এর মাঝে আন্দাজে বেছে নেয়। এদের গড় ৫০।
- **লেভেল-১ (L_1):** যারা ভাবে বাকি সবাই লেভেল-০ বোকা। তারা ৫০-এর দুই-তৃতীয়াংশ হিসাব করে **৩৩** বেছে নেয়। বাস্তব পরীক্ষায় ৩৩-এর কাছে বিশাল মানুষের ভিড় দেখা যায়।
- **লেভেল-২ (L_2):** যারা বোঝে অনেকে ৩৩ দেবে, তাই তারা ৩৩-এর দুই-তৃতীয়াংশ হিসাব করে **২২** বেছে নেয়। মানব ইতিহাসে প্রথম দেখায় সাধারণ মানুষের সবচেয়ে বড় দল এই ২২ বেছে নেয়।
- **লেভেল-৩ (L_3):** যারা আরও এক ধাপ এগিয়ে ১৫ বেছে নেয়।
- **ন্যাশ খেলোয়াড়:** অতি সামান্য কিছু মানুষ ০ বা ১ দেয়। তারা তাত্ত্বিকভাবে সঠিক হলেও কৌশলগতভাবে পরাজিত হয়, কারণ তারা প্রতিপক্ষের মানসিক সীমাবদ্ধতা অনুমান করতে ব্যর্থ হয়েছে।

কোয়ান্টাল রেসপন্স ইকুইলিব্রিয়াম (QRE)

বাস্তব পৃথিবীতে মানুষ শতভাগ নিখুঁত প্রতিক্রিয়া না দিয়ে লজিট সম্ভাব্যতা নিয়ম মেনে সিদ্ধান্ত নেয়। কলিন ক্যামেরারের গবেষণায় দেখা গেছে মানুষের চিন্তার গড় গভীরতা হলো মাত্র **১.৫ ধাপ**। এই আচরণগত সংশোধন গেম থিওরিকে বাস্তব শেয়ার বাজারের উন্মাদনা ও মানুষের সামরিক ভুলের নিখুঁত মডেল তৈরিতে সহায়তা করে।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "আচরণগত গেম থিওরি ও সীমাবদ্ধ যৌক্তিকতা — লেভেল-k কগনিটিভ হায়ারার্কি"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১৫।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-15-behavioral-game-theory-level-k-qre-bn/

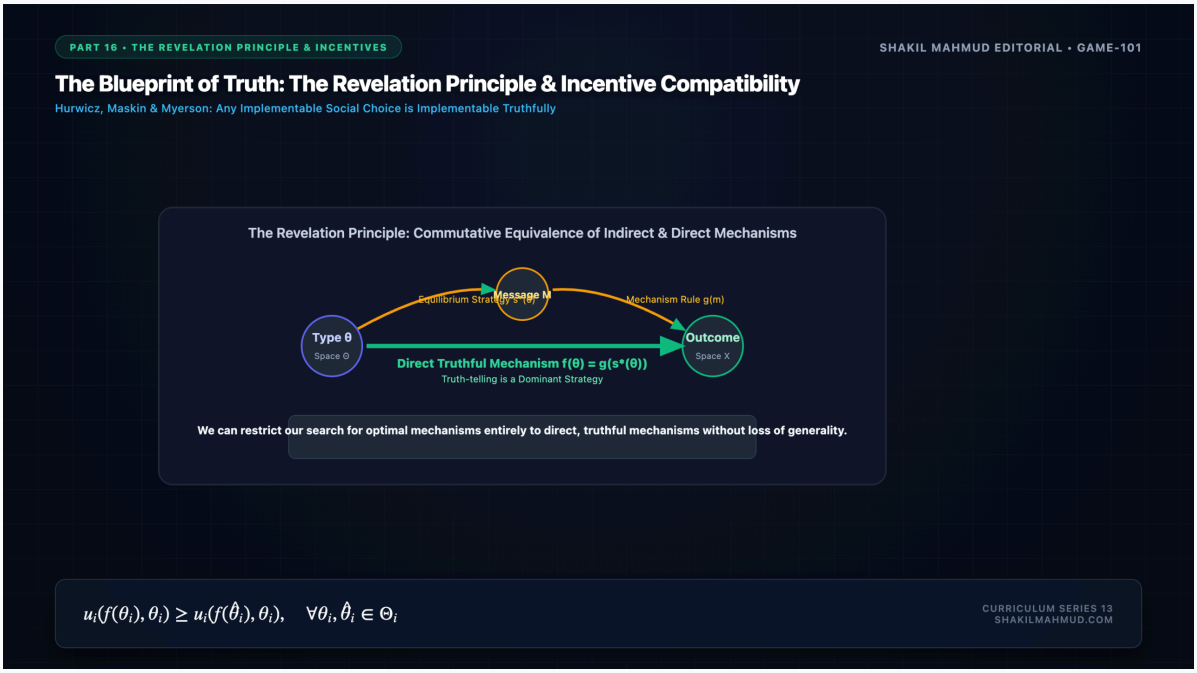
শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ষোড়শ খণ্ড

রেভেলেশন প্রিন্সিপল ও প্রণোদনা সংগতি — সত্যবাদী প্রতিষ্ঠানের গাণিতিক নকশা

রেভেলেশন প্রিন্সিপল ও প্রণোদনা সংগতি — সত্যবাদী প্রতিষ্ঠানের গাণিতিক নকশা

440 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ

❖



চিত্র ১৬: *রেভেলেশন প্রিন্সিপলের কমিউটেটিভ চিত্র, যা পরোক্ষ ও প্রত্যক্ষ সত্যবাদী মেকানিজমের সমতুল্যতা প্রমাণ করে।*

চিরায়ত গেম থিওরিতে খেলার নিয়মগুলো আগেই নির্ধারিত থাকে, এবং একজন তাত্ত্বিকের কাজ হলো সেই নিয়মের ভেতর যুক্তিশীল মানুষ কেমন আচরণ করবে তা বিশ্লেষণ করা। কিন্তু **মেকানিজম ডিজাইন (Mechanism Design)**-এ কার্যকারণ সম্পর্ক সম্পূর্ণ উল্টে যায়: সমাজ বা অর্থনীতির কাঙ্ক্ষিত লক্ষ্য আগেই জানা থাকে, আর বিশ্লেষকের কাজ হলো **খেলার নিয়মগুলো নতুন করে আবিষ্কার করা**। মেকানিজম ডিজাইন হলো প্রাতিষ্ঠানিক প্রকৌশলের সর্বোচ্চ রূপ: এমন কিছু নিয়ম, প্রণোদনা ও প্রোটোকল তৈরি করা যাতে সম্পূর্ণ আত্মস্বার্থপর মানুষও নিজের লাভ খুঁজতে গিয়ে সমাজকল্যাণের সর্বোচ্চ লক্ষ্যে পৌঁছাতে বাধ্য হয়। ১৯৭২ সালে লিওনিড হারউইচ, এরিক ম্যাসকিন এবং রজার মায়ারসন এই বিজ্ঞানের সবচেয়ে শক্তিশালী ভিত্তিপ্রস্তর স্থাপন করেন: **দ্য রেভেলেশন প্রিন্সিপল (The Revelation Principle)**।

মেকানিজম ডিজাইনের মূল সমস্যা

ধরা যাক একজন নীতিনির্ধারক একটি জনকল্যাণমূলক সিদ্ধান্ত নিতে চান (যেমন একটি নতুন সেতু তৈরি করা, স্পেকট্রাম নিলাম করা বা উপযুক্ত কিডনি গ্রহীতার সাথে দাতার ম্যাচিং করা)। সমাজে n জন নাগরিক রয়েছে, যাদের প্রত্যেকের একটি গোপন টাইপ $theta_i$ (ব্যক্তিগত মূল্যায়ন বা চাহিদা) রয়েছে।

নীতিনির্ধারকের লক্ষ্য একটি সামাজিক পছন্দ ফাংশন $f(theta)$ বাস্তবায়ন করা। কিন্তু সবচেয়ে বড় সংকট হলো: **নীতিনির্ধারক নাগরিকদের মনের গোপন সত্য জানেন না**! তিনি যদি সরাসরি জিজ্ঞেস করেন “এই সেতু আপনার কত উপকারে আসবে?”, তবে সবাই নিজের স্বার্থে বাড়িয়ে বা কমিয়ে বলবে।

পরোক্ষ মেকানিজম বনাম অসীম জটিলতা

অতীতে বিভিন্ন পরোক্ষ মেকানিজম তৈরি করা হতো: জটিল বহু-ধাপের নিলাম, গোপন দরপত্র, দীর্ঘ দরকষাকষি। কিন্তু সম্ভাব্য পরোক্ষ নিয়মের সংখ্যা তো অসীম! কীভাবে বোঝা যাবে কোন নিয়মটি সর্বোত্তম?

Shakil Mahmud • Research Monograph

দ্য রেভেলেশন প্রিন্সিপল

১৯৭৯ সালে রজার মায়ারসন এক অবিস্মরণীয় উপপাদ্য প্রমাণ করলেন। একটি **প্রত্যক্ষ মেকানিজম** হলো যেখানে নাগরিকদের সরাসরি তাদের গোপন সত্য প্রকাশ করতে বলা হয়। একটি মেকানিজমকে **প্রণোদনা-সংগত (Incentive Compatible)** বলা হয় যদি সত্য বলাই খেলোয়াড়ের জন্য সেরা কৌশল হয়।

রেভেলেশন প্রিন্সিপলের অমর উপপাদ্য

যেকোনো জটিল, বহু-ধাপের পরোক্ষ মেকানিজমের মাধ্যমে যদি কোনো সামাজিক লক্ষ্য বাস্তবায়ন করা সম্ভব হয়, তবে হুবহু সেই একই লক্ষ্য একটি প্রত্যক্ষ মেকানিজমের মাধ্যমেও বাস্তবায়ন করা সম্ভব যেখানে সত্য বলাই হলো প্রতিটি খেলোয়াড়ের সর্বোত্তম ভারসাম্য।

প্রমাণের চমকপ্রদ যুক্তি

প্রমাণটি অবিশ্বাস্য রকমের সহজ ও গভীর:

1. ধরা যাক একটি জটিল পরোক্ষ নিলামের নিয়মে খেলোয়াড়রা নিজ নিজ সত্যের প্রেক্ষিতে সর্বোত্তম চাল $s^*(theta)$ দেয়।
2. এবার একজন মধ্যস্থতাকারী কম্পিউটার তৈরি করা যাক। কম্পিউটার নাগরিকদের বলল: *“তোমাদের জটিল দরকষাকষির কৌশল হিসাব করার দরকার নেই। তোমরা কেবল তোমাদের আসল সত্য $theta_i$ আমাকে বলো। আমার অ্যালগরিদম তোমাদের হয়ে ওই জটিল খেলায় সেরা চালটি দিয়ে চূড়ান্ত ফলাফল এনে দেবে!”*
3. কোনো নাগরিকের কি কম্পিউটারের কাছে মিথ্যা বলার কোনো কারণ আছে? না! কারণ কম্পিউটারের কাছে মিথ্যা বলা মানে হলো মূল জটিল খেলায় একটি ভুল চাল দেওয়া। যেহেতু সে মূল খেলায় সত্য টাইপের ভিত্তিতেই সেরা চাল পেত, তাই কম্পিউটারের কাছে মিথ্যা বলে সে কখনোই লাভবান হতে পারবে না!

এর ফলে অসীম সংখ্যক জটিল নিয়মের মধ্যে ঘুরে বেড়ানোর প্রয়োজন নেই; কেবল প্রত্যক্ষ সত্যবাদী মেকানিজমের ওপর গাণিতিক অপ্টিমাইজেশন চালালেই বিশ্বের যেকোনো নিখুঁত বাজার ও নিলাম ডিজাইন করা সম্ভব।

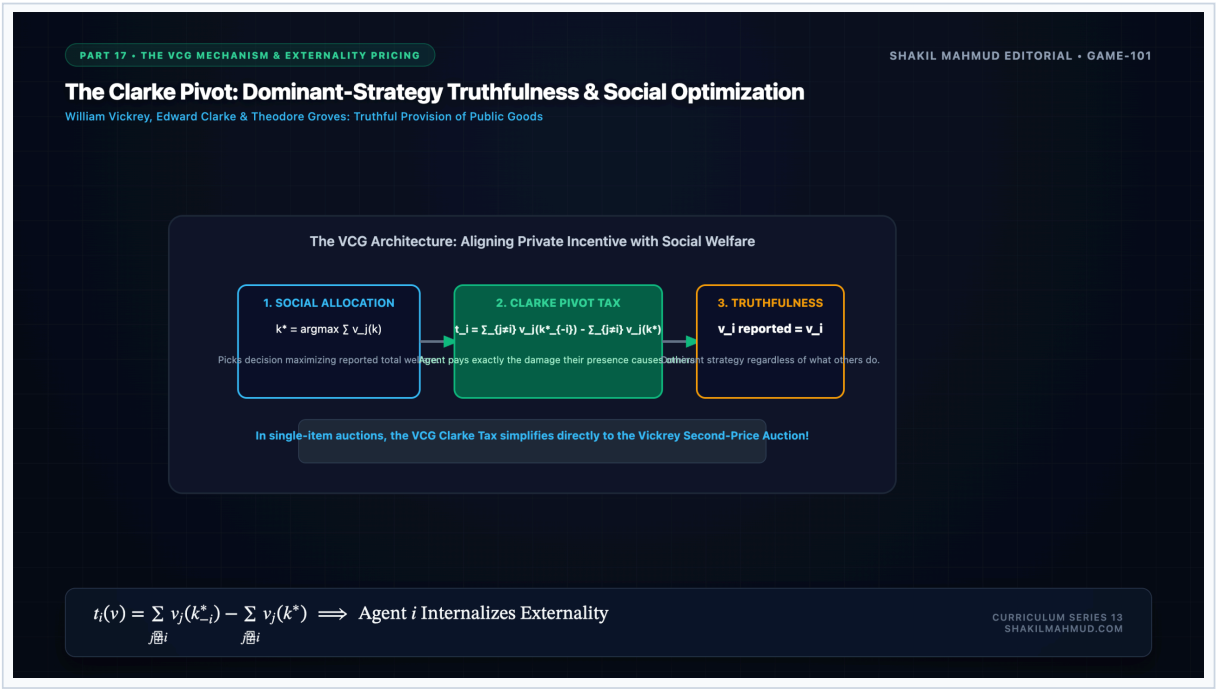
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "রেভেলেশন প্রিন্সিপল ও প্রণোদনা সংগতি — সত্যবাদী প্রতিষ্ঠানের গাণিতিক নকশা"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১৬।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-16-revelation-principle-incentive-compatibility-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • সপ্তদশ খণ্ড

ভিক্রি-ক্লার্ক-গ্রোভস (ভিসিজি) মেকানিজম — ক্লার্ক পিভট ট্যাক্স ও সত্যের বিজয়

ভিক্রি-ক্লার্ক-গ্রোভস (ভিসিজি) মেকানিজম — ক্লার্ক পিভট ট্যাক্স ও সত্যের বিজয়

448 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৭: *ভিক্রি-ক্লার্ক-গ্রোভস (ভিসিজি) মেকানিজম স্থাপত্য, ক্লার্ক পিভট ট্যাক্সের মাধ্যমে সামাজিক কল্যাণে ব্যক্তিগত প্রণোদনা।*

শতাব্দীর পর শতাব্দী ধরে অর্থনীতিবিদ এবং দার্শনিকরা একটি জটিল সামাজিক সংকটের মুখে পড়েছিলেন যাকে বলা হয় পাবলিক গুডসের ট্র্যাজেডি: যদি কোনো প্রকল্প সমাজের সবার উপকারে আসে (যেমন বাতিঘর, প্রতিরক্ষা ব্যবস্থা, এক্সপ্রেসওয়ে বা পরিচ্ছন্ন বায়ু), তবে নাগরিকরা তাদের আসল চাহিদা লুকিয়ে রেখে অন্য মানুষের খরচে বিনামূল্যে সুবিধা ভোগ করতে চায় (Free-Rider Problem)। এর ফলে বাজার ব্যর্থ হয়; প্রয়োজনীয় সেতু কখনো নির্মিত হয় না। ১৯৬১ থেকে ১৯৭৩ সালের মধ্যে তিনজন মহান গণিতবিদ—উইলিয়াম ভিক্রি, এডওয়ার্ড ক্লার্ক এবং থিওডোর গ্রোভস—মেকানিজম ডিজাইনের ইতিহাসে সবচেয়ে উজ্জ্বল রত্নটি আবিষ্কার করেন: **ভিক্রি-ক্লার্ক-গ্রোভস (ভিসিজি) মেকানিজম (The VCG Mechanism)**। ভিসিজি প্রমাণ করল যে এমন এক জাদুকরী গাণিতিক কর ব্যবস্থা প্রণয়ন করা সম্ভব যাতে প্রতিটি মানুষ তার গোপন সত্য প্রকাশ করতে বাধ্য হয়, কারণ সেখানে প্রত্যেককে ঠিক সেই পরিমাণ কর দিতে হয় যা তার উপস্থিতির কারণে সমাজের বাকি মানুষের ক্ষতি করে!

সামাজিক কল্যাণ সর্বোচ্চকরণ ও গ্রোভস কাঠামো

ধরা যাক সমাজকে একটি সমষ্টিগত সিদ্ধান্ত k নিতে হবে (যেমন একটি আধুনিক দ্রুতগতির রেললাইন তৈরি করা হবে কি না)। প্রতিটি নাগরিকের একটি ব্যক্তিগত মূল্যায়ন $v_i(k)$ রয়েছে এবং তাকে কর t_i দিতে হয়। সরকারের লক্ষ্য হলো এমন একটি সিদ্ধান্ত k^* নেওয়া যা সমাজের মোট সুখ বা উপযোগিতা সর্বোচ্চ করে:

$$k^* = argmax sum_{j=1}^{n} v_j(k)$$

কিন্তু সরকার যদি স্রেফ নাগরিকদের জিজ্ঞেস করে, তবে যে রেললাইন পছন্দ করে সে বাড়িয়ে কোটি কোটি টাকা দাবি করবে, আর যে পছন্দ করে না সে শূন্য দাবি করবে। থিওডোর গ্রোভস (১৯৭৩) প্রমাণ করলেন যে করের নিয়ম যদি নিচের সূত্রের মতো সাজানো হয়:

Shakil Mahmud • Research Monograph

t_i = h_i(hat{v}_{-i}) – sum_{j neq i} hat{v}_j(k^*)

তবে প্রতিটি নাগরিকের ব্যক্তিগত লাভ হুবহু সমাজের মোট কল্যাণের সাথে একাত্ম হয়ে যায়। সত্য বলাই তখন তার একমাত্র প্রভাবশালী কৌশল (Dominant Strategy)।

ক্লার্ক পিভট রুল: সমাজকে দেওয়া ক্ষতির মূল্য পরিশোধ

১৯৭১ সালে এডওয়ার্ড ক্লার্ক এই সূত্রে এক ঐতিহাসিক পরিমার্জন যোগ করেন: **ক্লার্ক পিভট ট্যাক্স**। তিনি বললেন, নাগরিক i যদি সমাজে না থাকত, তবে বাকি মানুষ যে সিদ্ধান্ত পেত (k^*_{-i}), তার উপযোগিতার যোগফল থেকে বর্তমান উপযোগিতার বিয়োগফলই হবে তার কর:

t_i = sum_{j neq i} hat{v}_j(k_{-i}^*) – sum_{j neq i} hat{v}_j(k^*)

এর গভীর অর্থটি লক্ষ্য করুন:

নাগরিক i-কে কেবল তখনই কর দিতে হবে যদি তার উপস্থিতির কারণে সমাজের সিদ্ধান্ত বদলে যায়, এবং তার কর হবে সমাজের বাকি মানুষের মোট যে ক্ষতি সে ঘটিয়েছে ঠিক তার সমান!

- যদি কোনো নাগরিকের মতামতের কারণে সামগ্রিক সিদ্ধান্ত না বদলায়, তাকে কোনো কর দিতে হয় না ($t_i = 0$)।
- আর যদি তার জেদের কারণে অন্যরা বঞ্চিত হয়, তবে অন্যদের বঞ্চনার আর্থিক ক্ষতি তাকে একাই কর হিসেবে দিতে হয়।

ভিক্রির দ্বিতীয়-মূল্য নিলামের রহস্য

একটি একক পণ্যের নিলামে ভিসিজি মেকানিজম প্রয়োগ করলে কী ঘটে? সর্বোচ্চ দরদাতা পণ্যটি জেতে। কিন্তু তার অনুপস্থিতিতে পণ্যটি পেত দ্বিতীয় সর্বোচ্চ দরদাতা। ফলে সমাজের বাকি মানুষের হারানো মূল্যের পরিমাণ হলো ঠিক **দ্বিতীয় সর্বোচ্চ ডাক (Second-Highest Bid)**। বিজয়ী পণ্যটি পায় এবং দ্বিতীয় সর্বোচ্চ দর প্রদান করে—যা হুবহু **উইলিয়াম ভিক্রির ১৯৬১ সালের সেকেন্ড-প্রাইস অকশন**!

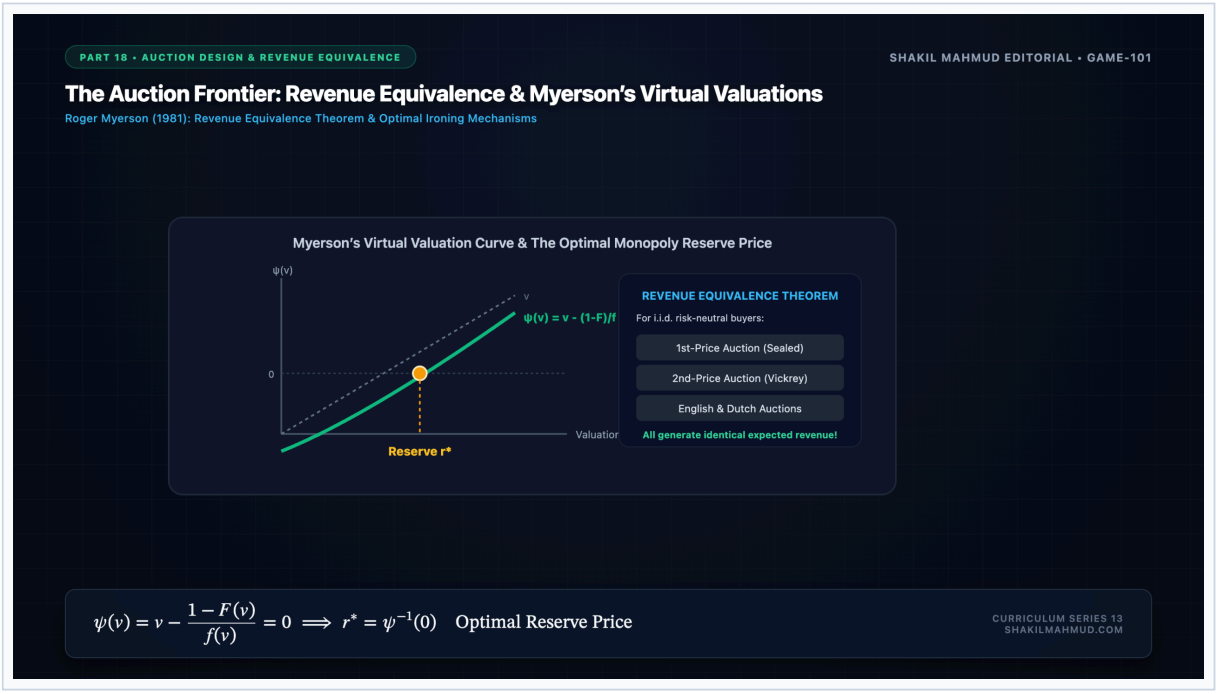
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ভিক্রি-ক্লার্ক-গ্রোভস (ভিসিজি) মেকানিজম — ক্লার্ক পিভট ট্যাক্স ও সত্যের বিজয়"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১৭।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-17-vcg-mechanism-clarke-pivot-externality-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • অষ্টাদশ খণ্ড

অপটিমাল অকশন ডিজাইন ও রেভিনিউ সমতুল্যতা — রজার মায়ারসনের নোবেলজয়ী মাস্টারপিস

অপটিমাল অকশন ডিজাইন ও রেভিনিউ সমতুল্যতা — রজার মায়ারসনের নোবেলজয়ী মাস্টারপিস

425 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৮: *রজার মায়ারসনের ভার্চুয়াল ভ্যালুয়েশন রেখা এবং বিভিন্ন নিলাম পদ্ধতির মধ্যে প্রত্যাশিত রাজস্ব সমতুল্যতা উপপাদ্য।*

১৯৯৪ সালে মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রের ফেডারেল কমিউনিকেশনস কমিশন (এফসিসি) গেম থিওরির ওপর ভিত্তি করে দেশের মোবাইল স্পেকট্রাম কয়েক বিলিয়ন ডলারে নিলাম করে, যা কয়েক দশকের রাজনৈতিক পক্ষপাতিত্ব দূর করে অর্থনৈতিক দক্ষতার এক নতুন যুগ সূচনা করে। সিলিকন ভ্যালিতে গুগল সার্চ বা ফেসবুক স্ক্রোল করার প্রতিটি মিলি-সেকেন্ডে স্বয়ংক্রিয় দ্বিতীয়-মূল্য নিলামের মাধ্যমে শত শত কোটি ডলারের বিজ্ঞাপন বরাদ্দ হচ্ছে। নিলাম হলো মানব সভ্যতার অন্যতম প্রাচীন ও প্রধান বাজার-পরিষ্কারকরণ ব্যবস্থা। ১৯৮১ সালে রজার মায়ারসন এমন একটি গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন যার জন্য তিনি ২০০৭ সালে অর্থনীতিতে নোবেল পুরস্কার পান: *“Optimal Auction Design”*। মায়ারসন নিলাম তত্ত্বের দুটি অমর স্তম্ভ আবিষ্কার করেন: **রেভিনিউ ইকুইভ্যালেন্স উপপাদ্য** এবং **ভার্চুয়াল ভ্যালুয়েশন**।

চারটি চিরায়ত নিলাম পদ্ধতি

বাণিজ্যিক ইতিহাসে একটি একক পণ্য বিক্রির জন্য চারটি প্রধান রূপ দেখা যায়:

1. **ইংরেজি নিলাম (English Auction):** ডাক প্রকাশ্যে ঊর্ধ্বমুখী হতে থাকে যতক্ষণ না একজন বাদে সবাই বাদ পড়ে; বিজয়ী শেষ ঘোষিত মূল্য প্রদান করে।
2. **ডাচ নিলাম (Dutch Auction):** একটি উচ্চ মূল্য থেকে ঘড়ির কাঁটার মতো দাম নামতে থাকে; যে প্রথম চিৎকার করে ডাকে, সে সেই মূল্যে পণ্য কেনে।
3. **প্রথম-মূল্য গোপন নিলাম (First-Price Sealed-Bid):** সবাই গোপনে খামে দরপত্র জমা দেয়; সর্বোচ্চ দরদাতা জেতে এবং তার নিজের ডাকা মূল্য দেয়।

Shakil Mahmud • Research Monograph

4. **দ্বিতীয়-মূল্য গোপন নিলাম (Second-Price / Vickrey):** সবাই গোপনে দরপত্র জমা দেয়; সর্বোচ্চ দরদাতা জেতে কিন্তু দ্বিতীয় সর্বোচ্চ ডাকা মূল্য প্রদান করে।

রেভিনিউ ইকুইভ্যালেন্স উপপাদ্য (Revenue Equivalence Theorem)

স্বাভাবিক সাধারণ বুদ্ধি বলে প্রথম-মূল্য নিলামে বিক্রেতা বেশি টাকা পাবে, কারণ সেখানে বিজয়ী তার পুরো ডাক পরিশোধ করে। অথচ ১৯৮১ সালে রজার মায়ারসন প্রমাণ করলেন গণিতের এক পরম বিস্ময়:

রাজস্ব সমতুল্যতা উপপাদ্য

ঝুঁকি-নিরপেক্ষ ক্রেতাদের ব্যক্তিগত মূল্যায়ন যদি স্বাধীন ও অভিন্ন বণ্টন ($F(v)$) থেকে আসে, তবে যে নিলাম পদ্ধতি সর্বোচ্চ মূল্যায়নকারীকে পণ্য বরাদ্দ করে এবং সর্বনিম্ন ক্রেতাকে শূন্য লাভ দেয়, **প্রতিটি নিলাম পদ্ধতিই বিক্রেতাকে হুবহু একই প্রত্যাশিত গড় রাজস্ব (Expected Revenue) এনে দেবে!**

এর কারণ হলো প্রথম-মূল্য নিলামে ক্রেতারা অতিরিক্ত দাম দেওয়ার ভয়ে তাদের ডাক কমিয়ে (Bid Shading) ঠিক দ্বিতীয় সর্বোচ্চ মূল্যের সমপরিমাণ দরে নামিয়ে আনে। কৌশলগত এই আত্মরক্ষা দ্বিতীয়-মূল্য নিলামের মূল্যছাড়ের সাথে পুরোপুরি মিলে যায়!

মায়ারসনের ভার্চুয়াল ভ্যালুয়েশন ও রিজার্ভ প্রাইস

কিন্তু বিক্রেতা যদি একজন মুনাফালোভী একচেটিয়া ব্যবসায়ী হয়, সে কীভাবে সর্বোচ্চ অর্থ আদায় করবে? মায়ারসন সংজ্ঞায়িত করলেন **ভার্চুয়াল ভ্যালুয়েশন** $psi(v)$:

psi(v) = v – frac{1 – F(v)}{f(v)}

এখানে frac{1 – F(v)}{f(v)} হলো তথ্যের গোপনীয়তা বজায় রাখার কারণে ক্রেতাকে দেওয়া “ইনফরমেশনাল রেন্ট”। মায়ারসন প্রমাণ করলেন যে বিক্রেতার রাজস্ব সর্বোচ্চ করতে হলে এমন একটি **সর্বোত্তম রিজার্ভ প্রাইস** r^* নির্ধারণ করতে হবে যার নিচে মাল বিক্রি হবে না:

psi(r^*) = 0 implies r^* – frac{1 – F(r^*)}{f(r^*)} = 0

সবচেয়ে চমকপ্রদ সত্য হলো: নিলামে ২ জন ক্রেতা থাকুক বা ২০০০ জন, এই অপটিমাল রিজার্ভ প্রাইস r^* সম্পূর্ণ অপরিবর্তিত থাকে! এটিই আজ গুগলের বিজ্ঞাপন অ্যালগরিদমের মূল ভিত্তি।

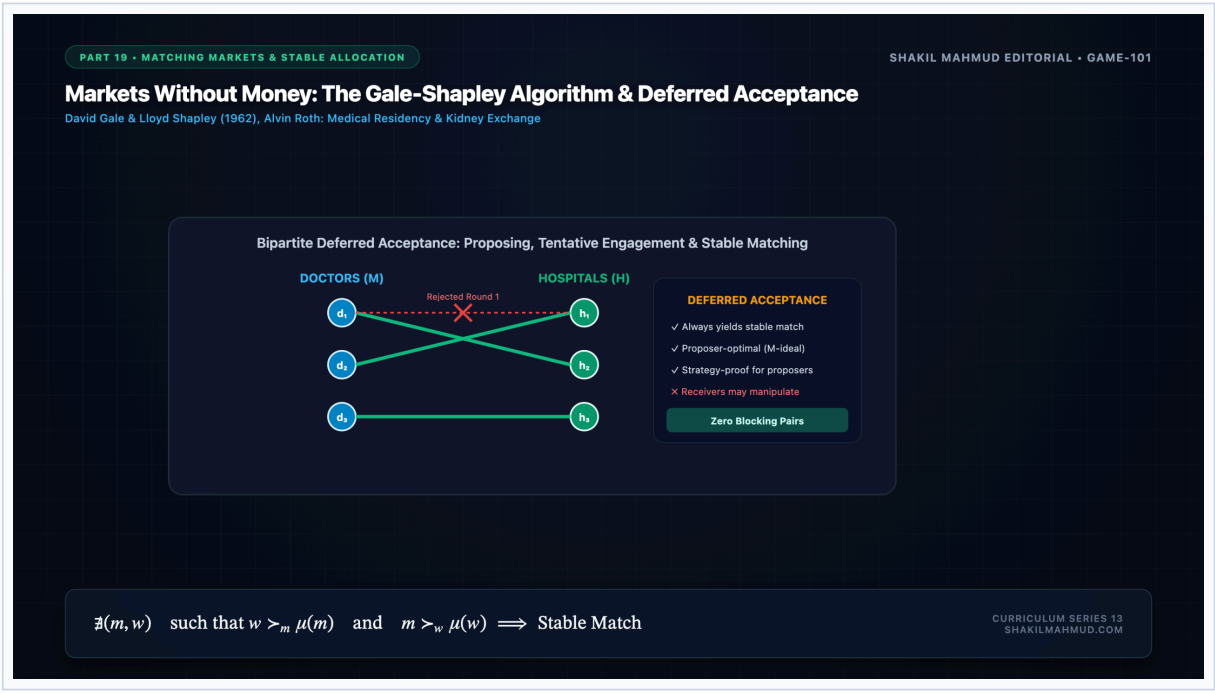
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "অপটিমাল অকশন ডিজাইন ও রেভিনিউ সমতুল্যতা — রজার মায়ারসনের নোবেলজয়ী মাস্টারপিস"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১৮।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-18-optimal-auctions-revenue-equivalence-myerson-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ঊনবিংশ খণ্ড

ম্যাচিং মার্কেট ও স্থিতিশীল বরাদ্দ — গেল-শ্যাপলে ডেফার্ড অ্যাকসেপ্টেন্স অ্যালগরিদম

ম্যাচিং মার্কেট ও স্থিতিশীল বরাদ্দ — গেল-শ্যাপলে ডেফার্ড অ্যাকসেপ্টেন্স অ্যালগরিদম

486 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৯: *গেল-শ্যাপলে ডেফার্ড অ্যাকসেপ্টেন্স অ্যালগরিদম, যা ব্লকিং পেয়ারহীন স্থিতিশীল দ্বিমুখী ম্যাচিং নিশ্চিত করে।*

চিরায়ত অর্থনীতিতে বাজারগুলো ভারসাম্যে পৌঁছায় মূল্যের মাধ্যমে: চাহিদা বেশি হলে দাম বাড়ে; সরবরাহ বেশি হলে দাম কমে। কিন্তু মানব সভ্যতার সবচেয়ে সংবেদনশীল ও মহৎ ক্ষেত্রগুলোতে **অর্থের লেনদেন আইনত, নৈতিকভাবে ও সামাজিকভাবে সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ**। আপনি হার্ভার্ড বা ঢাকা মেডিকেলে রেসিডেন্সির সিট নিলামে তুলে সর্বোচ্চ ধনী শিক্ষার্থীর কাছে বিক্রি করতে পারেন না; বাবা-মায়েরা সরকারি স্কুলে ভর্তির সিট টাকা দিয়ে কিনতে পারেন না; ডায়ালাইসিসের ধনাঢ্য রোগীর কাছে মানুষের কিডনি বিক্রি করা আন্তর্জাতিক আইনে অপরাধ। যেখানে টাকার ব্যবহার নিষিদ্ধ, সেখানে কীভাবে একটি ন্যায্য, দক্ষ ও নিখুঁত বাজার তৈরি করা সম্ভব? ১৯৬২ সালে দুই গণিতবিদ ডেভিড গেল এবং লয়েড শ্যাপলে এক অমর গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন: *"College Admissions and the Stability of Marriage"*। তাদের **ডেফার্ড অ্যাকসেপ্টেন্স অ্যালগরিদম** বাজার নকশায় বিপ্লব ঘটায়, যার জন্য ২০১২ সালে অ্যালভিন রথ এবং লয়েড শ্যাপলে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন।

দ্বিমুখী ম্যাচিং ও ব্লকিং পেয়ার (Blocking Pairs)

ধরা যাক দুটি দল রয়েছে: n জন ডাক্তার (বা বর) এবং n টি হাসপাতাল (বা কনে)। প্রতিটি ডাক্তারের কাছে হাসপাতালগুলোর একটি নিজস্ব পছন্দের তালিকা রয়েছে, এবং প্রতিটি হাসপাতালের কাছে ডাক্তারদের পছন্দের তালিকা রয়েছে।

একটি বণ্টনকে **অস্থিতিশীল** বলা হবে যদি সেখানে একটি *ব্লকিং পেয়ার* (m, w) তৈরি হয়: ডাক্তার m তার বর্তমান হাসপাতালের চেয়ে হাসপাতাল w-কে বেশি পছন্দ করে, এবং একই সাথে হাসপাতাল w-ও তার বর্তমান ডাক্তারের চেয়ে ডাক্তার m-কে বেশি পছন্দ করে! এমন জুটি তৈরি হলে তারা প্রাতিষ্ঠানিক বরাদ্দ ছুড়ে ফেলে নিজেরাই গোপনে চুক্তি করবে, ফলে পুরো ব্যবস্থা ধসে পড়বে। একটি ম্যাচিংকে **স্থিতিশীল (Stable)** হতে হলে এমন কোনো ব্লকিং পেয়ার থাকা চলবে না।

Shakil Mahmud • Research Monograph

গেল-শ্যাপলে ডেফার্ড অ্যাকসেপ্টেন্স অ্যালগরিদম

গেল এবং শ্যাপলে এমন একটি অ্যালগরিদম তৈরি করলেন যা সসীম ধাপে নিখুঁত স্থিতিশীল ম্যাচিং এনে দেয়:

প্রস্তাবক-ভিত্তিক গেল-শ্যাপলে অ্যালগরিদম

ধাপ ১: প্রতিটি অবিবাহিত পুরুষ তার পছন্দের তালিকার ১ নম্বর নারীকে বিয়ের প্রস্তাব দেয়। প্রতিটি নারী তার কাছে আসা সমস্ত প্রস্তাব বিবেচনা করে সবচেয়ে পছন্দের পুরুষটিকে *সাময়িক বিবেচনায় (Tentative Hold)* রাখে এবং বাকিদের সরাসরি ফিরিয়ে দেয়।

ধাপ ২: যারা প্রত্যাখ্যাত হলো, তারা তাদের তালিকার পরবর্তী পছন্দের নারীকে প্রস্তাব দেয়। নারীরা নতুন প্রস্তাব এবং আগের রাখা প্রস্তাব তুলনা করে সেরা একজনকে রেখে বাকিদের বাতিল করে।

সমাপ্তি: যখন আর কোনো পুরুষ প্রত্যাখ্যাত হবে না, তখন সাময়িক রাখা জুটিগুলোই চূড়ান্ত বিবাহ হিসেবে কার্যকর হয়।

স্থিতিশীলতা ও প্রস্তাবকের শ্রেষ্ঠত্ব

গেল ও শ্যাপলে প্রমাণ করলেন:

1. অ্যালগরিদমটি নিশ্চিতভাবে শেষ হবে এবং ফলাফলটি **শতভাগ ব্লকিং পেয়ারমুক্ত স্থিতিশীল** হবে।
2. যারা প্রস্তাব দেয়, তারা সম্ভাব্য সকল স্থিতিশীল ম্যাচিংয়ের মধ্যে তাদের **সর্বোত্তম পছন্দ** লাভ করে!
3. ১৯৮২ সালে অ্যালভিন রথ প্রমাণ করেন যে প্রস্তাবকদের জন্য **সত্য পছন্দের তালিকা দেওয়াই একমাত্র প্রভাবশালী কৌশল (Dominant Strategy)**।

বিয়ে থেকে হাজার হাজার মানুষের জীবন রক্ষা

১৯৯০-এর দশকে অর্থনীতিবিদ অ্যালভিন রথ আমেরিকার ন্যাশনাল রেসিডেন্ট ম্যাচিং প্রোগ্রামকে গেল-শ্যাপলে অ্যালগরিদম দিয়ে নতুন রূপ দেন, যা আজও প্রতি বছর ৪০,০০০ নবীন চিকিৎসকের ক্যারিয়ার নির্ধারণ করে।

২০০৪ সালে অ্যালভিন রথ এই ম্যাচিং অ্যালগরিদম প্রয়োগ করেন মানুষের **কিডনি প্রতিস্থাপন বিনিময় (Kidney Exchange)**-এ। প্রায়শই রোগীর আত্মীয় কিডনি দিতে চাইলেও রক্তের গ্রুপ বা অ্যান্টিবডির কারণে তা ম্যাচ করে না। রথের ম্যাচিং নেটওয়ার্ক এমন শত শত অসম জুটির মধ্যে চক্রাকার বিনিময় (Donor Swap Chains) তৈরি করে, যা কোনো অর্থের লেনদেন ছাড়াই হাজার হাজার মুমূর্ষু রোগীর প্রাণ বাঁচিয়ে চলেছে।

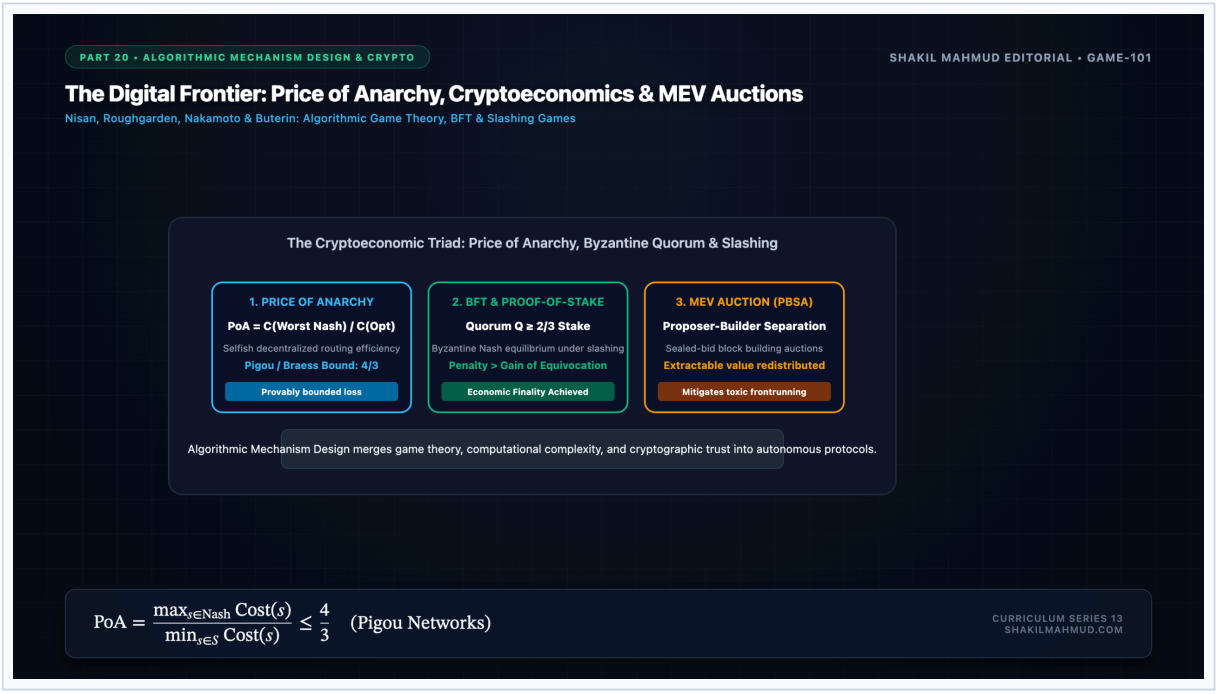
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ম্যাচিং মার্কেট ও স্থিতিশীল বরাদ্দ — গেল-শ্যাপলে ডেফার্ড অ্যাকসেপ্টেন্স অ্যালগরিদম"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ১৯।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-19-matching-markets-gale-shapley-deferred-acceptance-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • বিংশ খণ্ড

অ্যালগরিদমিক গেম থিওরি ও ক্রিপ্টোইকোনমিক্স — প্রাইস অব এনার্কি ও এমইভি নিলাম

অ্যালগরিদমিক গেম থিওরি ও ক্রিপ্টোইকোনমিক্স — প্রাইস অব এনার্কি ও এমইভি নিলাম

529 শব্দ • November 3, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ২০: *অ্যালগরিদমিক মেকানিজম ডিজাইন ট্রায়াড: প্রাইস অব এনার্কি, বাইজেন্টাইন ফল্ট টলারেন্স এবং ক্রিপ্টোগ্রাফিক এমইভি নিলাম।*

একবিংশ শতাব্দীতে গেম থিওরি ব্ল্যাকবোর্ডের তাত্ত্বিক সমীকরণ থেকে বেরিয়ে এসে কম্পিউটার বিজ্ঞান এবং বিকেন্দ্রীভূত ক্রিপ্টোগ্রাফিক নেটওয়ার্কের সিলিকন চিপে স্থায়ী নিবাস গড়ে তুলেছে। ইন্টারনেটের হাই-স্পিড অপটিক্যাল ফাইবার দিয়ে যখন লক্ষ লক্ষ স্বায়ত্তশাসিত রোবট, স্বয়ংক্রিয় ট্রেডিং অ্যালগরিদম এবং ব্লকচেইন ভ্যালিডেটররা সেকেন্ডের ভগ্নাংশে মিথস্ক্রিয়া করে, তখন চিরায়ত অর্থনীতির অনুমানগুলো মুখোমুখি হয় কম্পিউটেশনাল জটিলতা এবং বাইজেন্টাইন আক্রমণের নির্মম বাস্তবতার। একটি কেন্দ্রীয় পরিকল্পনাকারীর চেয়ে সম্পূর্ণ স্বাধীন ও বিকেন্দ্রীভূত ব্যবস্থা কতটা কম দক্ষ? বেনামী ইন্টারনেটে যেখানে ডাবল-স্পেন্ডিংয়ের বিপুল লোভ রয়েছে, সেখানে কীভাবে মানুষ সত্য ঐকমত্যে পৌঁছায়? এই ডিজিটাল বিপ্লবের অগ্নিকুণ্ড থেকেই জন্ম নিয়েছে **অ্যালগরিদমিক গেম থিওরি (Algorithmic Game Theory)** এবং **ক্রিপ্টোইকোনমিক্স (Cryptoeconomics)**।

প্রাইস অব এনার্কি (Price of Anarchy – PoA)

১৯৯৯ সালে কম্পিউটার বিজ্ঞানী ইলিয়াস কৌৎসুপিয়াস এবং ক্রিস্টোস পাপাদিমিত্রিয়া অ্যালগরিদমিক দক্ষতা ও গেম থিওরির সংযোগ ঘটিয়ে এক ঐতিহাসিক ধারণা প্রকাশ করেন: **প্রাইস অব এনার্কি (PoA)**।

যেকোনো বিকেন্দ্রীভূত ব্যবস্থায় (যেমন ইন্টারনেটের ডেটা প্যাকেট রাউটিং বা শহরের ট্রাফিক) স্বার্থপর চালকরা তাদের নিজস্ব সময় বাঁচাতে সেরা পথ বেছে নেয়, যা একটি ন্যাশ সাম্যাবস্থা তৈরি করে। বিপরীতে, একজন সর্বজ্ঞ কেন্দ্রীয় নিয়ন্ত্রক পুরো শহরের মোট যানজট সর্বনিম্ন করার পথ বেছে নিতেন। প্রাইস অব এনার্কি পরিমাপ করে সম্পূর্ণ বিশৃঙ্খলা ও স্বাধীনতার কারণে সমাজকে কতটা অতিরিক্ত মূল্য দিতে হয়:

$$textPoA = fractextSocialCost(textWorstNash)textSocialCost(textOptimum)$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

১৯৬৮ সালে ডিয়েট্রিচ ব্রায়েস এক অদ্ভুত ধাঁধা দেখিয়েছিলেন (**ব্রায়েসের প্যারাডক্স**): যানজট কমাতে রাস্তায় নতুন একটি শর্টকাট বানালে সবার স্বার্থপর আচরণের কারণে পুরো শহরের যানজট উল্টো আরও *বেড়ে যায়*! কিন্তু ২০০২ সালে টিম রাফগার্ডেন প্রমাণ করলেন যে আফাইন রাউটিং নেটওয়ার্কে প্রাইস অব এনার্কি অনধিক **৪/৩** (*approx*১.৩৩)। অর্থাৎ, কোনো কেন্দ্রীয় একনায়কতন্ত্র ছাড়াই স্বার্থপর বিকেন্দ্রীভূত ব্যবস্থা সমাজের সর্বোচ্চ দক্ষতার অন্তত ৭৫% অর্জন করতে পারে। গণিতের ভাষায় বিশৃঙ্খলার একটি গ্যারান্টিযুক্ত সীমানা রয়েছে!

ক্রিপ্টোইকোনমিক্স: বাইজেন্টাইন ঐকমত্য ও ন্যাশ

২০০৮ সালে সাতোশি নাকামোতো কম্পিউটার বিজ্ঞানের ত্রিশ বছরের পুরনো এক অসম্ভব সমস্যার সমাধান করেন: উন্মুক্ত বেনামী নেটওয়ার্কে **বাইজেন্টাইন জেনারেলস প্রবলেম**। নাকামোতো বুঝলেন যে ইন্টারনেটের নোডগুলো কোনো সাধু বা শয়তান নয়—তারা হলো **যৌক্তিক অর্থনৈতিক এজেন্ট**। ক্রিপ্টোগ্রাফিক হ্যাশ চেইনের সাথে তিনি মেকানিজম ডিজাইনের মেলবন্ধন ঘটালেন:

- **প্রুফ-অব-ওয়ার্ক:** ব্লক তৈরিতে বাস্তব থার্মোডাইনামিক বিদ্যুৎ পুড়িয়ে কাজ করতে হয়।
- **প্রণোদনা ইঞ্জিন:** একজন মাইনার নতুন বিটকয়েন ও ফি পায় কেবল তখনই যদি সে দীর্ঘতম বৈধ চেইনে কাজ করে।
- **সততার ন্যাশ সাম্যাবস্থা:** যার হাতে ৫১% কম্পিউটিং শক্তি নেই, তার জন্য নেটওয়ার্ক ধ্বংস করার চেয়ে সততার সাথে নিয়ম মেনে কাজ করাই সবচেয়ে বেশি লাভজনক। সততা এখানে একটি গাণিতিক ন্যাশ সাম্যাবস্থা!

প্রুফ-অব-স্টেক ও স্ল্যাশিং মেকানিজম

আধুনিক ক্রিপ্টো নেটওয়ার্কে (যেমন ইথেরিয়াম) বিদ্যুৎ পোড়ানোর বদলে মূলধন জামানত (Stake) রাখা হয়। এখানে মেকানিজম ডিজাইন প্রয়োগ করে **স্ল্যাশিং (Slashing Penalties)**: যদি কোনো নোড অসততা করে একই উচ্চতায় দুটি ভিন্ন ব্লকে স্বাক্ষর করে, তবে স্মার্ট কন্ট্রাক্ট স্বয়ংক্রিয়ভাবে তার কোটি কোটি টাকার জামানত পুড়িয়ে ধ্বংস করে দেয়। বিশ্বাসঘাতকতার শাস্তি লাভের চেয়ে বহুগুণ বেশি হওয়ায় সততাই একমাত্র স্থিতিশীল কৌশল হিসেবে টিকে থাকে।

এমইভি (MEV) ও আধুনিক ব্লকচেইনের নিলাম স্থাপত্য

ডিসেন্ট্রালাইজড ফাইন্যান্সে লেনদেনের ক্রম সাজিয়ে কোটি কোটি ডলার বের করে নেওয়া যায়, যাকে বলা হয় **ম্যাক্সিমাল এক্সট্র্যাক্টেবল ভ্যালু (MEV)**। এর ফলে সৃষ্ট গ্যাস মূল্যযুদ্ধ ঠেকাতে আজ অর্থনীতিবিদরা **প্রপোজার-বিল্ডার সেপারেশন (PBS)** এবং অফ-চেইন ভিক্রি নিলাম ডিজাইন করেছেন, যা বিশৃঙ্খল ফ্রন্ট-রানিংকে সুশৃঙ্খল নিলামে রূপান্তর করে নেটওয়ার্কের নিরাপত্তা ফিরিয়ে দেয়।

মহাকাব্যের সমাপনী

১৯৪৪ সালে জন ভন নিউম্যানের জিরো-সাম ম্যাট্রিক্স থেকে শুরু করে ২০২৬ সালের ক্রিপ্টোগ্রাফিক অ্যালগরিদমিক মেকানিজম পর্যন্ত—গেম থিওরি তার এক শতাব্দীর ঐতিহাসিক পরিক্রমা সম্পন্ন করেছে: মানব সংঘাতের নিষ্ক্রিয় বর্ণনা থেকে শুরু করে বাস্তবতার স্বায়ত্তশাসিত অর্থনৈতিক অপারেটিং সিস্টেম গড়ে তোলার এক পরম অভিযাত্রা।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "অ্যালগরিদমিক গেম থিওরি ও ক্রিপ্টোইকোনমিক্স — প্রাইস অব এনার্কি ও এমইভি নিলাম"। গেম থিওরি ও মেকানিজম ডিজাইন, খণ্ড ২০।
https://shakilmahmud.com/bn/game-theory-part-20-algorithmic-game-theory-crypto-mev-anarchy-bn/

আকর গ্রন্থ ও গবেষণা সূত্র

নির্বাচিত গ্রন্থপঞ্জি

এই মনোগ্রাফে আলোচিত তত্ত্ব, গাণিতিক প্রতিপাদন এবং ঐতিহাসিক বিশ্লেষণের ভিত্তি হিসেবে নিম্নলিখিত আকর গ্রন্থ ও প্রাথমিক গবেষণাপত্রসমূহ ব্যবহৃত হয়েছে:

von Neumann, John, & Morgenstern, Oskar (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

Nash, John F. Jr. (1950). *Equilibrium Points in n-Person Games*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 36(1): 48–49.

Nash, John F. Jr. (1951). *Non-Cooperative Games*. Annals of Mathematics, 54(2): 286–295.

Shapley, Lloyd S. (1953). *A Value for n-Person Games*. Contributions to the Theory of Games, Vol. II, Princeton University Press.

Gale, David, & Shapley, Lloyd S. (1962). *College Admissions and the Stability of Marriage*. The American Mathematical Monthly, 69(1): 9–15.

Selten, Reinhard (1965). *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragenträgheit*. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 121: 301–324.

Harsanyi, John C. (1967). *Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players (Parts I–III)*. Management Science, 14: 159–182, 320–334, 486–502.

Akerlof, George A. (1970). *The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and the Market Mechanism*. The Quarterly Journal of Economics, 84(3): 488–500.

Spence, Michael (1973). *Job Market Signaling*. The Quarterly Journal of Economics, 87(3): 355–374.

Maynard Smith, John, & Price, George R. (1973). *The Logic of Animal Conflict*. Nature, 246(5427): 15–18.

Crawford, Vincent P., & Sobel, Joel (1982). *Strategic Information Transmission*. Econometrica, 50(6): 1431–1451.

Myerson, Roger B. (1981). *Optimal Auction Design*. Mathematics of Operations Research, 6(1): 58–73.

Roughgarden, Tim, & Tardos, Éva (2002). *How Bad is Selfish Routing?*. Journal of the ACM, 49(2): 236–259.

Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E., & Vazirani, V. (2007). *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press.

Shakil Mahmud • Research Monograph

লেখক পরিচিতি

লেখক পরিচিতি

Shakil Mahmud

গবেষক, লেখক ও সফটওয়্যার প্রকৌশলী

শাকিল মাহমুদ একজন স্বাধীন গবেষক, লেখক ও সফটওয়্যার প্রকৌশলী। তাঁর প্রধান আগ্রহের বিষয় হলো তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞান, গণিতের ইতিহাস, আধুনিক ম্যাক্রোঅর্থনীতি, কম্পিউটিংয়ের বিবর্তন এবং স্থান-কালের দার্শনিক তাৎপর্য। তিনি জটিল দার্শনিক ও বৈজ্ঞানিক ধারণাকে গভীর ও সুললিত ভাষায় উপস্থাপন করতে পছন্দ করেন। তাঁর সার্বিক কাজ পাওয়া যাবে তাঁর ব্যক্তিগত গবেষণা পোর্টাল **shakilmahmud.com** এ।

COLOPHON

Typeset in EB Garamond (English) and Kohinoor Bangla / Noto Serif Bengali (Bengali).
Mathematical typesetting generated with Donald Knuth's TeX algorithms and KaTeX.
Published digitally as a monolithic research monograph by Shakil Mahmud Editorial Series.
Dhaka & Singapore • 2026 • https://shakilmahmud.com