Shakil Mahmud • Research Monograph

SHAKIL MAHMUD EDITORIAL & RESEARCH MONOGRAPHS

পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা

কার্নো চক্র ও বোল্টসম্যানের এন্ট্রপি থেকে পার্টিশন ফাংশন, বোস-আইনস্টাইন ঘনীভবন, অপ্রাকৃতিক ওঠানামা সমতা এবং ব্ল্যাক হোল তাপগতিবিদ্যার ২০ খণ্ডের এক প্রামাণ্য প্রাকৃতিক মহাকাব্য।

SHAKIL MAHMUD

গবেষক ও লেখক

SHAKIL MAHMUD EDITORIAL & RESEARCH SERIES

প্রথম সংকলিত সংস্করণ • ঢাকা ও সিঙ্গাপুর • ২০২৬

পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা

কার্নো চক্র ও বোল্টসম্যানের এন্ট্রপি থেকে পার্টিশন ফাংশন, বোস-আইনস্টাইন ঘনীভবন, অপ্রাকৃতিক ওঠানামা সমতা এবং ব্ল্যাক হোল তাপগতিবিদ্যার ২০ খণ্ডের এক প্রামাণ্য প্রাকৃতিক মহাকাব্য।

LIBRARY & CATALOGING-IN-PUBLICATION DATA

Title: পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা
Author: Shakil Mahmud
Series: Shakil Mahmud Editorial & Research Series (Monograph Collection)
Subjects: Science -- History -- Philosophy -- Mathematics -- Civilization
Published: Dhaka & Singapore, 2026
Format: Digital Monograph Offprint (PDF) • Complete 20-Part Collected Edition
Permanent URI: https://shakilmahmud.com/series/thermodynamics/

প্রস্তাবিত সাইটেশন:
Mahmud, Shakil. (2026). *পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা: The Complete 20-Part Collected Monograph*. Shakil Mahmud Research Series. https://shakilmahmud.com/series/thermodynamics/

Open Scholarly Access: This collected monograph is published under Open Scholarly Access for personal study, academic citation, university pedagogy, and non-commercial research.

© 2026 Shakil Mahmud. All rights reserved. Typeset and published at Dhaka and Singapore.

Shakil Mahmud • Research Monograph

তাত্ত্বিক ভূমিকা

ভূমিকা: জ্ঞানের একীভূত রূপরেখা

১৮২৪ সালে সাদি কার্নোর আগুনের চালিকাশক্তি বিষয়ক অনুসন্ধান থেকে শুরু করে স্টিফেন হকিংয়ের কোয়ান্টাম হরাইজন বিকিরণ পর্যন্ত—তাপগতিবিদ্যা ও পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যার ইতিহাস হলো আণুবীক্ষণিক বিশৃঙ্খলা থেকে দৃশ্যমান মহাজাগতিক বাস্তবতার উন্মেষের এক অমর মহাকাব্য। বিশ খণ্ডে সংকলিত এই গবেষণা মনোগ্রাফ মহাবিশ্বকে নিয়ন্ত্রণকারী প্রতিটি মৌলিক স্তম্ভকে বিশ্লেষণ করে: কার্নো চক্র, ম্যাক্সওয়েল-বোল্টজম্যান গতিতত্ত্ব, লিওভিল ফেজ স্পেস অসংকোচনীয়তা, বোল্টজম্যানের লগারিদমিক এন্ট্রপি, গিবসের ক্যানোনিকাল ও গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, কোয়ান্টাম ডেনসিটি ম্যাট্রিক্স, বোস-আইনস্টাইন ঘনীভবন, ফার্মি অবক্ষয়িত চাপ, ল্যান্ডউ দশা রূপান্তর, ২ডি আইসিং মডেল, উইলসনের রিনরমালাইজেশন গ্রুপ, ল্যাঞ্জেভিন ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন, ম্যাক্সওয়েলের ডিমন ও ল্যান্ডউয়ার নীতি, ওনসাগারের প্রতিসাম্য, প্রিগোজিনের ডিসিপেটিভ রূপ, জারজিনস্কি-ক্রুক্স নন-ইকুইলিব্রিয়াম সমীকরণ এবং বেকেনস্টাইন-হকিং ব্ল্যাক হোল হলোগ্রাফি।

এই গবেষণামূলক কাজের উদ্দেশ্য কেবল তথ্য উপস্থাপন নয়, বরং চিন্তার গভীর বিকাশকে পাঠকের সামনে উন্মোচন করা। প্রতিটি পরিচ্ছদ এক একটি যুগান্তকারী বৌদ্ধিক সংকটের সমাধান হিসেবে কীভাবে আবির্ভূত হয়েছে, তা এখানে পদ্ধতিগতভাবে লিপিবদ্ধ করা হলো।

— Shakil Mahmud
Dhaka & Singapore, 2026

অধ্যায় সূচি

সূচিপত্র

প্রথম পর্যায়: প্রত্যক্ষ আইন ও চিরায়ত গতিতত্ত্ব

খণ্ড ১ — কাজের পরম সীমা — কার্নো ইঞ্জিন, এনট্রপি ও দ্বিতীয় সূত্র — 630 শব্দ
কাজের পরম সীমা — কার্নো ইঞ্জিন, এনট্রপি ও দ্বিতীয় সূত্র

খণ্ড ২ — শক্তির জ্যামিতি — থার্মোডাইনামিক পটেনশিয়াল, লেজেন্ডার রূপান্তর ও ম্যাক্সওয়েল সম্পর্ক — 562 শব্দ
শক্তির জ্যামিতি — থার্মোডাইনামিক পটেনশিয়াল, লেজেন্ডার রূপান্তর ও ম্যাক্সওয়েল সম্পর্ক

খণ্ড ৩ — বিশৃঙ্খলার বেগ — গতিতত্ত্ব ও ম্যাক্সওয়েল-বোল্টজম্যান বণ্টন — 591 শব্দ
বিশৃঙ্খলার বেগ — গতিতত্ত্ব ও ম্যাক্সওয়েল-বোল্টজম্যান বণ্টন

খণ্ড ৪ — সিম্প্লেকটিক মহাসমুদ্র — হ্যামিল্টনীয় ফেজ স্পেস, লিওভিল উপপাদ্য ও মাইক্রোস্টেট — 572 শব্দ
সিম্প্লেকটিক মহাসমুদ্র — হ্যামিল্টনীয় ফেজ স্পেস, লিওভিল উপপাদ্য ও মাইক্রোস্টেট

দ্বিতীয় পর্যায়: পরিসংখ্যানিক এনসেম্বল ও আণুবীক্ষণিক সম্ভাবনা

খণ্ড ৫ — সম্ভাবনার লগারিদম — বোল্টজম্যান এনট্রপি, মাইক্রোস্টেট ও মাল্টিপ্লিসিটি — 532 শব্দ
সম্ভাবনার লগারিদম — বোল্টজম্যান এনট্রপি, মাইক্রোস্টেট ও মাল্টিপ্লিসিটি

খণ্ড ৬ — সময়ের তির — বোল্টজম্যানের এইচ-থিওরেম, আণবিক বিশৃঙ্খলা ও লশমিটের প্যারাডক্স — 628 শব্দ
সময়ের তির — বোল্টজম্যানের এইচ-থিওরেম, আণবিক বিশৃঙ্খলা ও লশমিটের প্যারাডক্স

খণ্ড ৭ — তাপীয় আধার — ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, পার্টিশন ফাংশন ও মুক্ত শক্তি — 515 শব্দ
তাপীয় আধার — ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, পার্টিশন ফাংশন ও মুক্ত শক্তি

খণ্ড ৮ — উন্মুক্ত বিনিময় — গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, রাসায়নিক বিভব ও কণা বিস্তার — 581 শব্দ
উন্মুক্ত বিনিময় — গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, রাসায়নিক বিভব ও কণা বিস্তার

তৃতীয় পর্যায়: কোয়ান্টাম পরিসংখ্যান ও সন্ধি ঘটনা

খণ্ড ৯ — মিশ্র কোয়ান্টাম দশা — ডেনসিটি ম্যাট্রিক্স ও ফন নিউম্যান এনট্রপি — 487 শব্দ
মিশ্র কোয়ান্টাম দশা — ডেনসিটি ম্যাট্রিক্স ও ফন নিউম্যান এনট্রপি

খণ্ড ১০ — প্রতিসম অভিন্ন কণা — বোস-আইনস্টাইন পরিসংখ্যান ও কোয়ান্টাম ঘনীভবন — 472 শব্দ
প্রতিসম অভিন্ন কণা — বোস-আইনস্টাইন পরিসংখ্যান ও কোয়ান্টাম ঘনীভবন

খণ্ড ১১ — পাউলির অপবর্জন ঢাল — ফার্মি-ডিরাক পরিসংখ্যান ও অবক্ষয়িত চাপ — 578 শব্দ
পাউলির অপবর্জন ঢাল — ফার্মি-ডিরাক পরিসংখ্যান ও অবক্ষয়িত চাপ

খণ্ড ১২ — প্রতিসাম্য ভঙ্গ — দশা রূপান্তর, সন্ধি ঘটনা ও ল্যান্ডউ গড় ক্ষেত্র তত্ত্ব — 608 শব্দ
প্রতিসাম্য ভঙ্গ — দশা রূপান্তর, সন্ধি ঘটনা ও ল্যান্ডউ গড় ক্ষেত্র তত্ত্ব

চতুর্থ পর্যায়: ওঠানামা, জটিলতা ও মহাজাগতিক দিগন্ত

খণ্ড ১৩ — ল্যাটিস চুম্বকত্ব — ২ডি আইসিং মডেল ও লার্স ওনসাগারের নিখুঁত সমাধান — 560 শব্দ
ল্যাটিস চুম্বকত্ব — ২ডি আইসিং মডেল ও লার্স ওনসাগারের নিখুঁত সমাধান

খণ্ড ১৪ — প্রকৃতির স্কেল অবিচলতা — ব্লক-স্পিন, রিনরমালাইজেশন গ্রুপ ও উইলসনের ফিক্সড পয়েন্ট — 530 শব্দ
প্রকৃতির স্কেল অবিচলতা — ব্লক-স্পিন, রিনরমালাইজেশন গ্রুপ ও উইলসনের ফিক্সড পয়েন্ট

খণ্ড ১৫ — দ্বৈপায়ন গতি ও সান্দ্রীয় বাধা — ব্রাউনীয় গতি, ল্যাঞ্জেভিন বলবিদ্যা ও ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন — 490 শব্দ
দ্বৈপায়ন গতি ও সান্দ্রীয় বাধা — ব্রাউনীয় গতি, ল্যাঞ্জেভিন বলবিদ্যা ও ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন

খণ্ড ১৬ — তথ্যও এক ধরনের পদার্থ — ম্যাক্সওয়েলের ডিমন, জিলার্ড ইঞ্জিন ও ল্যান্ডউয়ারের নীতি — 580 শব্দ
তথ্যও এক ধরনের পদার্থ — ম্যাক্সওয়েলের ডিমন, জিলার্ড ইঞ্জিন ও ল্যান্ডউয়ারের নীতি

খণ্ড ১৭ — যুগ্ম প্রবাহের ঐক্য — রৈখিক সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত তাপগতিবিদ্যা ও ওনসাগারের সম্পর্ক — 517 শব্দ
যুগ্ম প্রবাহের ঐক্য — রৈখিক সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত তাপগতিবিদ্যা ও ওনসাগারের সম্পর্ক

খণ্ড ১৮ — বিশৃঙ্খলা থেকে শৃঙ্খলা — চরম সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত পদার্থবিদ্যা ও প্রিগোজিনের ডিসিপেটিভ রূপ — 585 শব্দ
বিশৃঙ্খলা থেকে শৃঙ্খলা — চরম সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত পদার্থবিদ্যা ও প্রিগোজিনের ডিসিপেটিভ রূপ

Shakil Mahmud • Research Monograph

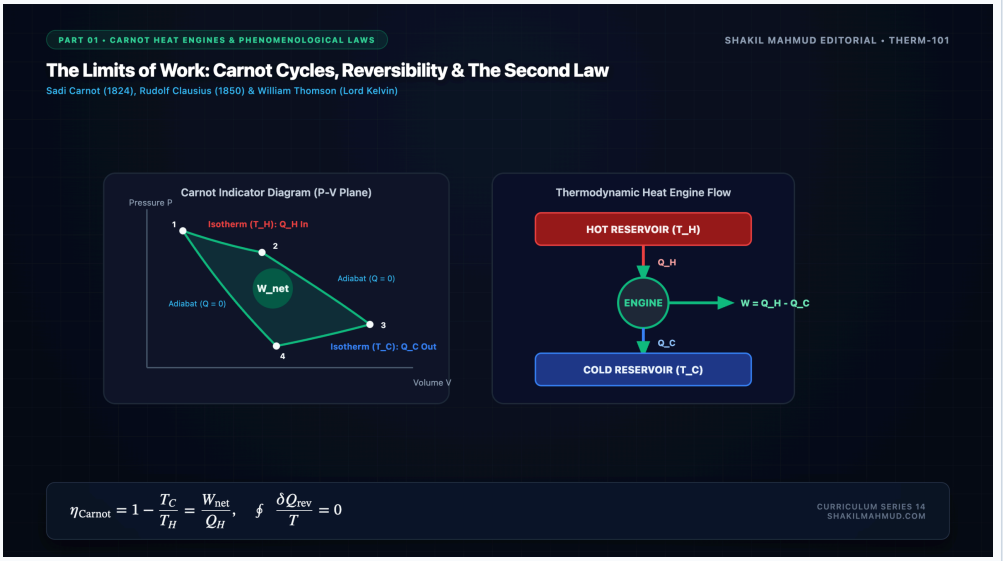
খণ্ড ১৯	**ওঠানামার জগতে নিখুঁত কার্য — স্টোকাস্টিক তাপগতিবিদ্যা ও জারজিনস্কি-ক্রুক্স সমীকরণ** *ওঠানামার জগতে নিখুঁত কার্য — স্টোকাস্টিক তাপগতিবিদ্যা ও জারজিনস্কি-ক্রুক্স সমীকরণ*	565 শব্দ
খণ্ড ২০	**এন্ট্রপির দিগন্ত — বেকেনস্টাইন-হকিং বলবিদ্যা, হলোগ্রাফি ও মহাজাগতিক সময়ের তির** *এন্ট্রপির দিগন্ত — বেকেনস্টাইন-হকিং বলবিদ্যা, হলোগ্রাফি ও মহাজাগতিক সময়ের তির*	699 শব্দ

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • প্রথম খণ্ড

কাজের পরম সীমা — কার্নো ইঞ্জিন, এনট্রপি ও দ্বিতীয় সূত্র

কাজের পরম সীমা — কার্নো ইঞ্জিন, এনট্রপি ও দ্বিতীয় সূত্র

630 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১: *পি-ভি সমতলে কার্নো চক্রের নির্দেশক চিত্র এবং তাপ আধারের বিনিময়, যা কার্নোর দক্ষতা সীমা ও ক্লসিয়াসের সমতা প্রদর্শন করে।*

১৮২৪ সালে আটাশ বছর বয়সী ফরাসি সামরিক প্রকৌশলী নিকোলাস লিওনার্দ সাদি কার্নো মাত্র পঁয়ষট্টি পৃষ্ঠার একটি ছোট পুস্তিকা প্রকাশ করেন: *Réflexions sur la puissance motrice du feu* (“আগুনের চালিকাশক্তি বিষয়ক প্রতিফলন”)। শিল্পবিপ্লবের প্রারম্ভে বাষ্পীয় ইঞ্জিনগুলো ছিল কয়লাখেকো, ভারী এবং অবিশ্বাস্য রকমের অদক্ষ। সমসাময়িক বিজ্ঞানীরা বিশ্বাস করতেন কাজ উৎপন্ন হয় “ক্যালরিক” নামক এক ভরহীন তাপীয় তরলের ধ্বংস বা খরচের মাধ্যমে। কার্নো এই বস্তুগত ধারণাকে ধূলিসাৎ করেন। তিনি উপলব্ধি করেন, তাপ ধ্বংস হয়ে কাজ সৃষ্টি হয় না; বরং কাজ তৈরি হয় একটি উঁচু তাপীয় বিভব থেকে নিচু তাপীয় বিভবে তাপের পতনের মাধ্যমে—ঠিক যেভাবে পাহাড়ের ওপর থেকে নিচে নেমে আসা পানির স্রোত জলচক্রের চাকা ঘুরিয়ে দেয়।

আদর্শ ইঞ্জিন ও পরিবর্তনশীলতার ধারণা (Reversibility)

কার্নো এমন এক মৌলিক প্রশ্ন তুলেছিলেন যা তার যুগের সমস্ত ধাতুবিদ্যা ও যান্ত্রিক কলাকৌশলকে ছাড়িয়ে গিয়েছিল: একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ তাপ থেকে সর্বাধিক কতটুকু যান্ত্রিক কাজ বের করে আনা সম্ভব? এই প্রশ্নের উত্তর খুঁজতে তিনি ঘর্ষণ,乚ぶ% ও অনিচ্ছাকৃত পরিবাহিতা রোধ করে এক আদর্শ, কাল্পনিক ইঞ্জিনের নকশা তৈরি করেন, যা চারটি অত্যন্ত ধীর ও প্রত্যাবর্তী (quasi-static reversible) ধাপের মধ্য দিয়ে সম্পূর্ণ হয়:

1. **প্রত্যাবর্তী সমোষ্ণ প্রসারণ ($১ to ২$):** সিলিন্ডারটিকে T_H পরম তাপমাত্রার একটি উষ্ণ আধারের সংস্পর্শে রাখা হয়। গ্যাসটি V_1 থেকে V_2 আয়তনে প্রসারিত হতে হতে Q_H তাপ শোষণ করে, কিন্তু তার তাপমাত্রা অপরিবর্তিত থাকে। এখানে কৃতকাজের পরিমাণ $W_{12} = int_{V_1}^{V_2} P, dV = nRT_H ln(V_2/V_1) = Q_H$।
2. **প্রত্যাবর্তী রুদ্ধতাপীয় প্রসারণ ($২ to ৩$):** সিলিন্ডারটিকে তাপীয়ভাবে বিচ্ছিন্ন করা হয় ($dQ = 0$)। গ্যাসটি পিস্টনের ওপর চাপ প্রয়োগ করে আরও প্রসারিত হতে গিয়ে নিজস্ব অভ্যন্তরীণ শক্তি ব্যয় করে শীতল হয় এবং তাপমাত্রা T_H থেকে নেমে T_C-তে পৌঁছায়।
3. **প্রত্যাবর্তী সমোষ্ণ সংকোচন ($৩ to ৪$):** সিলিন্ডারটিকে T_C তাপমাত্রার শীতল আধারের সংস্পর্শে স্থাপন করে বাইরে থেকে পিস্টনে চাপ দিয়ে গ্যাসকে সংকুচিত করা হয়। এই প্রক্রিয়ায় গ্যাস Q_C পরিমাণ তাপ শীতল আধারে বর্জন করে: $|Q_C| = nRT_C ln(V_3/V_4)$।
4. **প্রত্যাবর্তী রুদ্ধতাপীয় সংকোচন ($৪ to ১$):** পুনরায় সিলিন্ডারটিকে অন্তরক দিয়ে ঘিরে সংকুচিত করে আদি দশায় (P_1, V_1, T_H) ফিরিয়ে আনা হয়।

কার্নোর উপপাদ্য ও দক্ষতার পরম সীমা

যেহেতু এই আদর্শ চক্রের প্রতিটি ধাপ সম্পূর্ণ প্রত্যাবর্তী, তাই এই ইঞ্জিনটিকে বিপরীতভাবে চালিয়ে একটি আদর্শ রেফ্রিজারেটর তৈরি করা সম্ভব। বাইরে থেকে W কাজ প্রয়োগ করে শীতল আধার থেকে Q_C তাপ তুলে উষ্ণ আধারে Q_H তাপ নিক্ষেপ করা যায়। দ্বিতীয় প্রকার চিরস্থায়ী গতির (Perpetual motion of the second kind) অসম্ভবতা প্রমাণ করে কার্নো তার ঐতিহাসিক উপপাদ্য দেন:

> ***কার্নোর উপপাদ্য:*** *দুটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রার আধারের মধ্যে ক্রিয়াশীল কোনো তাপ ইঞ্জিনই একটি প্রত্যাবর্তী ইঞ্জিনের চেয়ে বেশি দক্ষ হতে পারে না, এবং একই তাপমাত্রার মধ্যে চালিত সকল প্রত্যাবর্তী ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা সমান—ব্যবহৃত গ্যাস বা পদার্থের ধরনের ওপর তা কোনোভাবেই নির্ভরশীল নয়।*

Shakil Mahmud • Research Monograph

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে রুদ্ধতাপীয় সম্পর্কের মাধ্যমে প্রমাণিত হয় যে, তাপীয় বিনিময়ের অনুপাত সরাসরি আধারদ্বয়ের পরম তাপমাত্রার অনুপাতের সমান:

$$frac{Q_C}{Q_H} = frac{T_C}{T_H}$$

ফলে কার্নো ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা শুধুমাত্র তাপমাত্রার ব্যবধানের একটি পরম জ্যামিতিক ধ্রুবক:

eta_{text{Carnot}} = frac{W_{text{net}}}{Q_H} = frac{Q_H – Q_C}{Q_H} = 1 – frac{T_C}{T_H}

ক্লসিয়াস, অপচয়ের সমাকলন ও এন্ট্রপির জন্ম

কার্নোর মৃত্যুর কয়েক দশক পর জার্মান পদার্থবিদ রুডলফ ক্লসিয়াস তাপমাত্রার এই অনুপাতকে পুনঃবিশ্লেষণ করেন। শোষিত তাপ ধনাত্মক এবং বর্জিত তাপ ঋণাত্মক ধরে তিনি লিখলেন:

$$frac{Q_H}{T_H} + frac{Q_C}{T_C} = 0$$

ক্লসিয়াস বুঝতে পেরেছিলেন যে, চাপ-আয়তন তলে যেকোনো জটিল ও চক্রাকার প্রত্যাবর্তী পথকে অগণিত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কার্নো চক্রের সমষ্টি হিসেবে ভাগ করা যায়। ফলে যেকোনো আবদ্ধ পথে differential তাপ স্থানান্তরকে তাপমাত্রা দিয়ে ভাগ করে সমাকলন করলে তার মান শূন্য হয়:

$$oint frac{delta Q_{text{rev}}}{T} = 0$$

এই সমাকলন প্রমাণ করে যে $dS = frac{delta Q_{text{rev}}}{T}$ একটি প্রকৃত স্টেট ফাংশন (state function)। গ্রিক শব্দ রূপান্তর ($taurhoopiacuteeta$) থেকে ক্লসিয়াস এর নাম রাখলেন **এন্ট্রপি** (S)। যেকোনো বাস্তব ও অপ্রত্যাবর্তী চক্রের জন্য ক্লসিয়াসের অসমতা দেখায়:

$$oint frac{delta Q}{T} le 0 implies Delta S ge int frac{delta Q}{T}$$

মহাবিশ্বের যেকোনো বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থায় ($delta Q = 0$) এন্ট্রপি কখনো কমতে পারে না: $dS ge 0$। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের এই ছিল মহান সূচনা—মহাবিশ্বে শক্তি অপরিবর্তনশীল হলেও, কাজের উপযোগী শক্তির মান অবিরতভাবে ক্ষয়প্রাপ্ত ও বিশৃঙ্খল হচ্ছে।

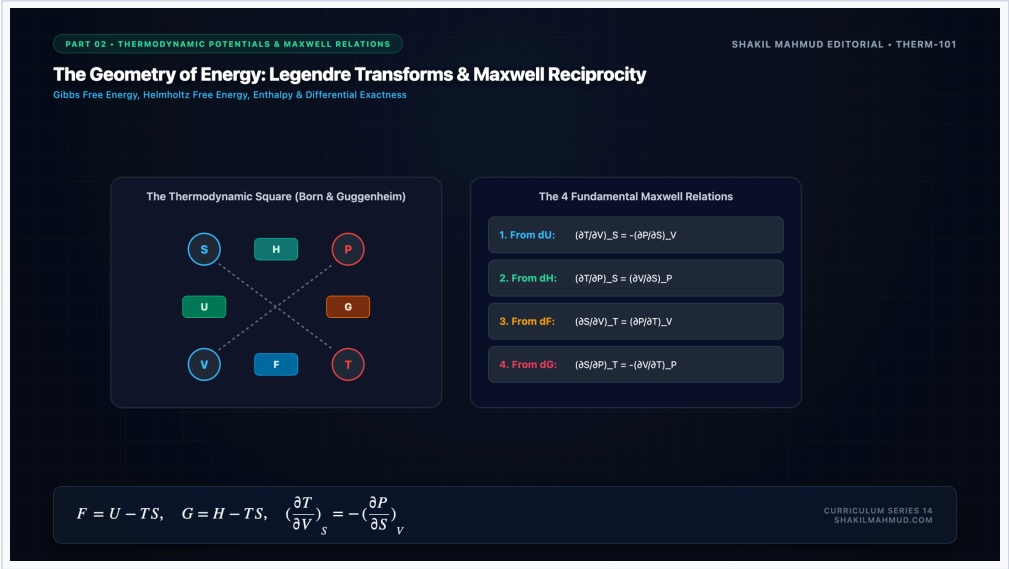
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "কাজের পরম সীমা — কার্নো ইঞ্জিন, এন্ট্রপি ও দ্বিতীয় সূত্র"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-1-carnot-engines-entropy-second-law-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দ্বিতীয় খণ্ড

শক্তির জ্যামিতি — থার্মোডাইনামিক পটেনশিয়াল, লেজেন্ডার রূপান্তর ও ম্যাক্সওয়েল সম্পর্ক

শক্তির জ্যামিতি — থার্মোডাইনামিক পটেনশিয়াল, লেজেন্ডার রূপান্তর ও ম্যাক্সওয়েল সম্পর্ক

562 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ২: *বর্ন-গুগেনহাইম থার্মোডাইনামিক স্কয়ার ও লেজেন্ডার রূপান্তর, যেখান থেকে চারটি মৌলিক ম্যাক্সওয়েল সম্পর্ক প্রতিপাদিত হয়।*

চিরায়ত বলবিদ্যায় যেকোনো ব্যবস্থার গতিবিধি নিয়ন্ত্রিত হয় একটি সুনির্দিষ্ট শক্তি অপেক্ষক—ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান বা হ্যামিল্টোনিয়ানের মাধ্যমে। কিন্তু ম্যাক্রোস্কোপিক তাপগতিবিদ্যায় শক্তি কোনো সরল একমাত্রিক সত্ত্বা নয়। বায়ুমণ্ডলীয় চাপে যখন কোনো রাসায়নিক বিক্রিয়া ঘটে, অথবা কোষের সমোষ্ণ পরিবেশে যখন প্রোটিন ভাঁজ হয়, তখন স্বতঃস্ফূর্ত রূপান্তরের দিক কেবল মোট অভ্যন্তরীণ শক্তি U দ্বারা নির্ধারিত হয় না। বরং তা নিয়ন্ত্রিত হয় পারিপার্শ্বিক সীমানা ও শর্ত দ্বারা নির্দিষ্ট এক বিশেষ শক্তির পটেনশিয়াল দ্বারা। লেজেন্ডার রূপান্তরের (Legendre Transformation) জাদুকরী গাণিতিক কাঠামোর মাধ্যমে তাপগতিবিদ্যা চারটি মৌলিক পটেনশিয়াল প্রতিষ্ঠা করে এবং জন্ম দেয় ম্যাক্সওয়েলের অসাধারণ প্রতিসাম্য সম্পর্কের।

মৌলিক তাপগতি সমীকরণ ও অভ্যন্তরীণ শক্তি

প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রের সমন্বয়ে অভ্যন্তরীণভাবে প্রত্যাবর্তী প্রক্রিয়ার জন্য মৌলিক ডিফারেনশিয়াল সমীকরণটি দাঁড়ায়:

$$dU = T\,dS - P\,dV + \sum_i \mu_i\,dN_i$$

এখানে অভ্যন্তরীণ শক্তি $U = U(S, V, N_i)$ তার নিজস্ব স্বাভাবিক চলক—এন্ট্রপি S, আয়তন V এবং কণা সংখ্যা N_i-এর অপেক্ষক হিসেবে প্রকাশিত। এদের ব্যবকলন থেকে পাওয়া যায় তীব্র চলকগুলো (intensive variables):

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N}, \quad P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N}, \quad \mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S,V,N_{j\neq i}}$$

তাত্ত্বিকভাবে নিখুঁত হলেও গবেষণাগারে $U(S, V, N)$ ব্যবহার করা অত্যন্ত কঠিন। কারণ এন্ট্রপিকে স্থির রাখা মানে সম্পূর্ণ তাপ-নিরোধক পরিবেশ তৈরি করা, যা বাস্তবে জটিল; অথচ তাপমাত্রা T বা চাপ P নিয়ন্ত্রণ করা অত্যন্ত সহজ। তাই আমাদের এমন একটি গাণিতিক রূপান্তর প্রয়োজন যা কোনো ভৌত তথ্য না হারিয়েই চলকগুলোকে অদলবদল করতে পারে।

লেজেন্ডার রূপান্তর: উত্তল জ্যামিতির দ্বৈততা

একটি মসৃণ উত্তল অপেক্ষক $f(x)$-কে বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, f(x))$ দিয়ে যেমন প্রকাশ করা যায়, তেমনি স্পর্শকের ঢাল $p = f'(x)$ এবং উলম্ব ছেদাংশ $-g(p)$ দিয়েও প্রকাশ করা সম্ভব। এই দ্বৈত অপেক্ষক $g(p)$-কে বলা হয় লেজেন্ডার রূপান্তর:

$$g(p) = \sup_x [p\,x - f(x)] \implies g(p) = p\,x(p) - f(x(p))$$

এই দ্বৈততা তাপগতিবিদ্যায় প্রয়োগ করে তৈরি হয় তিনটি অপরিহার্য পটেনশিয়াল:

- **হেলমহোল্টজ মুক্ত শক্তি $F(T, V, N)$ (F = U − TS):**

Shakil Mahmud • Research Monograph

dF = -S dT – P dV + mu dN

স্থির তাপমাত্রা ও স্থির আয়তনে ($dT = 0, dV = 0$) যেকোনো স্বতঃস্ফূর্ত প্রক্রিয়ায় F-এর মান হ্রাস পায়। কোনো ব্যবস্থা থেকে সর্বাধিক যে পরিমাণ সমোষ্ণ কাজ আহরণ করা সম্ভব, তা হলো $-DeltaF$।

- **এনথালপি $H(S, P, N)$ ($H = U + PV$):**

$$dH = TdS + VdP + mudN$$

স্থির চাপে ($dP = 0$) কোনো প্রক্রিয়ায় গৃহিত বা বর্জিত তাপ হুবহু এনথালপির পরিবর্তনের সমান: $dQ_P = dH$।

- **গিবস মুক্ত শক্তি $G(T, P, N)$ (G = H – TS):**

$$dG = -SdT + VdP + mudN$$

যেহেতু অধিকাংশ রাসায়নিক বিক্রিয়া এবং জীবকোষের জৈবিক প্রক্রিয়া স্থির তাপমাত্রা ও স্থির বায়ুমণ্ডলীয় চাপে ঘটে, তাই রসায়নে গিবস মুক্ত শক্তিই প্রধান নিয়ামক: প্রক্রিয়া তখনই স্বতঃস্ফূর্ত হবে যদি $dGle0$ হয়।

ম্যাক্সওয়েলের সম্পর্ক ও থার্মোডাইনামিক স্কয়ার

যেহেতু এই পটেনশিয়ালগুলো স্টেট ফাংশন, তাই সোয়ার্জের উপপাদ্য (Schwarz's Theorem) অনুযায়ী তাদের দ্বিতীয় মাত্রার মিশ্র ব্যবকলনগুলো পরস্পর সমান হতে বাধ্য: $fracpartial^2 Phipartialxpartialy = fracpartial^2 Phipartialypartialx$। এই গাণিতিক অনিবার্যতা থেকে জন্ম নেয় ম্যাক্সওয়েলের চারটি বিখ্যাত সম্পর্ক:

1. dU থেকে: $left(fracpartialTpartialVright)_S = -left(fracpartialPpartialSright)_V$
2. dH থেকে: $left(fracpartialTpartialPright)_S = left(fracpartialVpartialSright)_P$
3. dF থেকে: $left(fracpartialSpartialVright)_T = left(fracpartialPpartialTright)_V$
4. dG থেকে: $left(fracpartialSpartialPright)_T = -left(fracpartialVpartialTright)_P$

এই সম্পর্কগুলোর প্রায়োগিক গুরুত্ব অপরিসীম। সরাসরি পরিমাপ করা অসম্ভব এমন রাশি—যেমন স্থির তাপমাত্রায় চাপ বৃদ্ধির সাথে এন্ট্রপির পরিবর্তন $(partialS/partialP)_T$—খুব সহজেই পরিমাপযোগ্য আয়তন প্রসারণ সহগ $alpha$ দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব হয়। লেজেন্ডার রূপান্তরের মাধ্যমে তাপগতিবিদ্যা যান্ত্রিক, তাপীয় ও রাসায়নিক ঘটনাগুলোকে এক অভিন্ন গাণিতিক সুতোয় গেঁথে ফেলে।

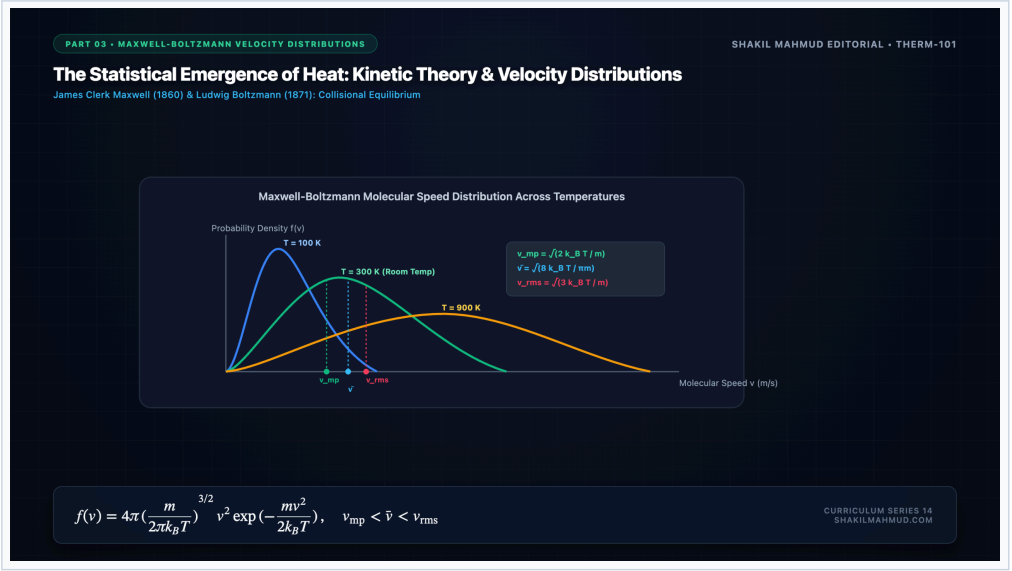
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "শক্তির জ্যামিতি — থার্মোডাইনামিক পটেনশিয়াল, লেজেন্ডার রূপান্তর ও ম্যাক্সওয়েল সম্পর্ক"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ২।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-2-potentials-legendre-transforms-maxwell-relations-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • তৃতীয় খণ্ড

বিশৃঙ্খলার বেগ — গতিতত্ত্ব ও ম্যাক্সওয়েল-বোল্টজম্যান বণ্টন

বিশৃঙ্খলার বেগ — গতিতত্ত্ব ও ম্যাক্সওয়েল-বোল্টজম্যান বণ্টন

591 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৩: *বিভিন্ন তাপমাত্রায় ম্যাক্সওয়েল-বোল্টজম্যান আণবিক দ্রুতি বণ্টন রেখা এবং সম্ভাব্যতম, গড় ও মূল-গড়-বর্গ বেগের আপেক্ষিক অবস্থান।*

অষ্টাদশ ও ঊনবিংশ শতাব্দী জুড়ে চিরায়ত তাপগতিবিদ্যা ছিল বিজ্ঞানের এক অনন্য বিস্ময়। এটি নির্ভুলভাবে হিসাব করতে পারত বাষ্পের প্রসারণ, পিস্টনের গতি এবং রাসায়নিক সাম্যাবস্থা—কিন্তু পদার্থের আণুবীক্ষণিক গঠন সম্পর্কে তা ছিল সম্পূর্ণ নীরব। চাপ আসলে কী? তাপমাত্রা বলতে মৌলিকভাবে কী বোঝায়? ১৮৫৯ সালে স্কটিশ গণিতবিদ ও পদার্থবিজ্ঞানী জেমস ক্লার্ক ম্যাক্সওয়েল সেই অদৃশ্যের জগতে এক দুঃসাহসী পদক্ষেপ ফেললেন। তিনি গ্যাসকে কোনো অবিচ্ছিন্ন তরল না ভেবে নিউটনের গতিসূত্র মেনে চলা ট্রিলিয়ন ট্রিলিয়ন স্থিতিস্থাপক গোলাকার পরমাণুর এক বিশাল বিশৃঙ্খল ঝাঁক হিসেবে কল্পনা করলেন। এই অনুমানের ভিত্তিতে ম্যাক্সওয়েল পদার্থবিজ্ঞানের প্রথম পরিসংখ্যানিক সূত্র আবিষ্কার করলেন: আণবিক দ্রুতি বণ্টন সমীকরণ।

গতিতত্ত্ব থেকে চাপের পরিসংখ্যানিক প্রতিপাদন

$V = L^3$ আয়তনের একটি ঘনকাকার পাত্রে N সংখ্যক m ভরের আদর্শ গ্যাস কণা বিবেচনা করা যাক। v_x বেগে চলমান একটি কণা যখন x-অক্ষের উল্লম্ব দেওয়ালে স্থিতিস্থাপক ধাক্কা খায়, তখন তার ভরবেগের পরিবর্তন ঘটে $Deltap_x = 2mv_x$। দেওয়ালটিতে দুটি পরপর ধাক্কার মধ্যবর্তী সময় $Deltat = 2L/v_x$। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী এই কণাটির দ্বারা দেওয়ালের ওপর প্রযুক্ত গড় বল:

$$F_x = fracDeltap_xDeltat = frac2mv_x2L/v_x = fracmv_x^2L$$

সকল N সংখ্যক কণার জন্য এই বলের সমষ্টি নিয়ে দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $A = L^2$ দ্বারা ভাগ করলে মোট চাপ পাওয়া যায়:

$$P = frac1L^2sum_{i=1}^{N}fracmv_{x,i}^2L = fracNmVlanglev_x^2rangle$$

যেহেতু মহাকর্ষহীন গ্যাসে সব দিক সমান (আইসোট্রপিক), তাই কণার বেগ তিনটি মাত্রাতেই সমানভাবে বণ্টিত থাকে: $langlev^2rangle = langlev_x^2rangle + langlev_y^2rangle + langlev_z^2rangle = 3langlev_x^2rangle$। সুতরাং $langlev_x^2rangle = frac13langlev^2rangle$ বসালে গতিতত্ত্বের মহান সমীকরণটি বেরিয়ে আসে:

$$PV = frac13Nmlanglev^2rangle = frac23Nleft(frac12mlanglev^2rangleright) = frac23E_textkin$$

আদর্শ গ্যাসের পরীক্ষালব্ধ সূত্র $PV = Nk_BT$-এর সাথে এর তুলনা করলেই তাপমাত্রার গোপন রহস্য উন্মোচিত হয়:

$$leftlangle frac12mv^2 rightrangle = frac32k_BT$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

তাপমাত্রা কোনো রহস্যময় তরল নয়; তাপমাত্রা হলো অণুগুলোর গড় রৈখিক গতিশক্তির প্রত্যক্ষ পরিমাপক।

ম্যাক্সওয়েলের দ্রুতি বণ্টন ও গাণিতিক কাঠামো

ম্যাক্সওয়েল উপলব্ধি করেন যে, প্রতিটি আণবিক সংঘর্ষ চরম বিশৃঙ্খল হলেও সামগ্রিকভাবে সাম্যাবস্থায় বেগের বণ্টন হতে হবে স্থির ও অপরিবর্তনীয়। তিনি ধরে নেন যে তিনটি স্থানাঙ্কের বেগ উপাদান (v_x, v_y, v_z) পরিসংখ্যানগতভাবে স্বাধীন, ফলে যৌথ সম্ভাবনাকে গুণফল হিসেবে লেখা যায়:

$$f(mathbf{v}) = phi(v_x)phi(v_y)phi(v_z)$$

আবার স্থানিক প্রতিসাম্যের কারণে এই সম্ভাবনা কেবল বেগের পরম মান $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$-এর ওপর নির্ভর করতে পারে। এই সমীকরণটি সমাধানের একমাত্র গাণিতিক রূপ হলো এক্সপোনেনশিয়াল গাউসিয়ান কার্ভ:

$$phi(v_x) = left(frac{m}{2pi k_B T}right)^{1/2} exp left(-frac{m v_x^2}{2k_B T}right)$$

তিন মাত্রার বেগ স্পেসে v ব্যাসার্ধের একটি পাতলা গোলকীয় খোলের ক্ষেত্রফল $4pi v^2 dv$ দিয়ে সমাকলন করলে পাওয়া যায় বিখ্যাত **ম্যাক্সওয়েল-বোল্টজম্যান দ্রুতি বণ্টন**:

$$f(v), dv = 4pi left(frac{m}{2pi k_B T}right)^{3/2} v^2 exp left(-frac{m v^2}{2k_B T}right) dv$$

তিনটি চারিত্রিক দ্রুতি ও শক্তির সমবণ্টন নীতি

বণ্টনটি প্রতিসম নয়—শুরুতে v^2-এর কারণে এটি দ্রুত উপরে ওঠে এবং উচ্চ বেগে $e^{-mv^2/2k_BT}$-এর প্রভাবে দীর্ঘ লেজ তৈরি করে নিচে নেমে আসে। ফলে এখান থেকে তিনটি ভিন্ন চারিত্রিক দ্রুতি পাওয়া যায়:

1. **সর্বাধিক সম্ভাব্য দ্রুতি (v_{textmp}):** $f(v)$-এর শীর্ষবিন্দু ($frac{df}{dv} = 0$):

$$v_{textmp} = sqrt{frac{2k_B T}{m}}$$

2. **গড় দ্রুতি ($bar{v}$):** প্রথম মোমেন্ট $int_0^infty v f(v), dv$:

$$bar{v} = sqrt{frac{8k_B T}{pi m}}$$

3. **মূল-গড়-বর্গ দ্রুতি ($v_{textrms}$):** গতিশক্তির সাথে সরাসরি সম্পর্কিত:

$$v_{textrms} = sqrt{frac{3k_B T}{m}}$$

এই সার্বজনীন ক্রম $v_{text{mp}} < bar{v} < v_{text{rms}}$ তাপীয় সাম্যাবস্থার এক মৌলিক নিদর্শন। পরবর্তীতে লুডভিগ বোল্টজম্যান একে প্রসারিত করে প্রতিষ্ঠা করেন **শক্তির সমবণ্টন নীতি (Equipartition Theorem)**: তাপীয় সাম্যাবস্থায় প্রতিটি দ্বিঘাত স্বাধীনতার মাত্রা (রৈখিক, ঘূর্ণন বা কম্পন) ঠিক $frac{1}{2}k_BT$ পরিমাণ তাপীয় শক্তি ধারণ করে। তাপ আর কোনো বিমূর্ত ধারণা রইল না—তা রূপ নিল কোটি কোটি পরমাণুর স্পন্দিত নৃত্যে।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "বিশৃঙ্খলার বেগ — গতিতত্ত্ব ও ম্যাক্সওয়েল-বোল্টজম্যান বণ্টন"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ৩। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-3-kinetic-theory-maxwell-boltzmann-distributions-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • চতুর্থ খণ্ড

সিম্প্লেকটিক মহাসমুদ্র — হ্যামিল্টনীয় ফেজ স্পেস, লিওভিল উপপাদ্য ও মাইক্রোস্টেট

সিম্প্লেকটিক মহাসমুদ্র — হ্যামিল্টনীয় ফেজ স্পেস, লিওভিল উপপাদ্য ও মাইক্রোস্টেট

572 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র 8: *হ্যামিল্টনীয় ফেজ স্পেসে অসংকোচনীয় প্রবাহ এবং লিওভিল উপপাদ্যের সিম্প্লেকটিক আয়তন নিত্যতা।*

এক গ্লাস সাধারণ পানিতে প্রায় ১০^{২৪}টি অণু থাকে। চিরায়ত বলবিদ্যা ব্যবহার করে প্রতিটি অণুর অবস্থান ও বেগ নিখুঁতভাবে জানতে হলে আমাদের একই সাথে ৬$times$১০^{২৪}টি ব্যবকলনীয় সমীকরণ সমাধান করতে হবে—যা এই সমগ্র দৃশ্যমান মহাবিশ্বের যাবতীয় কম্পিউটারের ধারণক্ষমতার চেয়েও বেশি। তবুও তাপগতিবিদ্যা মাত্র তিনটি সংখ্যার সাহায্যে এই এক গ্লাস পানির সামগ্রিক অবস্থা ব্যাখ্যা করতে পারে: তাপমাত্রা, চাপ এবং আয়তন। এই বিস্ময়কর সরলীকরণ কীভাবে সম্ভব হলো? ঊনবিংশ শতাব্দীর মাঝামাঝি ফরাসি গণিতবিদ জোসেফ লিওভিল হ্যামিল্টনীয় বলবিদ্যার এক যুগান্তকারী জ্যামিতিক উপপাদ্য আবিষ্কার করেছিলেন, যা পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যার মূলভিত্তি স্থাপন করে: ফেজ স্পেস প্রবাহের অসংকোচনীয়তা।

হ্যামিল্টনীয় বলবিদ্যা ও ৬N-মাত্রিক ফেজ স্পেস

তাত্ত্বিক বলবিদ্যায় N সংখ্যক কণার যেকোনো ব্যবস্থাকে $3N$ সংখ্যক সাধারণ স্থানাঙ্ক $mathbfq = (q_1, dots, q_{3N})$ এবং $3N$ সংখ্যক ভরবেগ $mathbfp = (p_1, dots, p_{3N})$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এদের সমন্বয়ে গঠিত $6N$-মাত্রিক স্থানকে বলা হয় **ফেজ স্পেস** ($Gamma = mathbbR^{6N}$):

$$mathbfx = (mathbfq, mathbfp) = (q_1, dots, q_{3N}, p_1, dots, p_{3N}) in Gamma$$

এই মহাজাগতিক ব্যবস্থার কালানুক্রমিক বিবর্তন পরিচালিত হয় একটি একক স্কেলার অপেক্ষক—হ্যামিল্টোনিয়ান $H(mathbfq, mathbfp, t)$-এর মাধ্যমে, যা হ্যামিল্টনের ক্যানোনিকাল সমীকরণ মেনে চলে:

$$dotq_i = fracpartial Hpartial p_i, quad dotp_i = -fracpartial Hpartial q_i quad (i = 1, dots, 3N)$$

ফেজ স্পেসের প্রতিটি বিন্দু একটি নির্দিষ্ট **মাইক্রোস্টেট** নির্দেশ করে। সময় বাড়ার সাথে সাথে বিন্দুটি ফেজ স্পেসে একটি একমাত্রিক গতিপথ তৈরি করে। কিন্তু যেহেতু কোনো বাস্তব পরীক্ষায় ট্রিলিয়ন কণার অবস্থান একযোগে মাপা অসম্ভব, তাই জে. উইলার্ড গিবস একক কণার গতিপথ ভাবার পরিবর্তে একটি কাল্পনিক পরিসংখ্যানিক **এনসেম্বল** (ensemble)-এর ধারণা দেন: একই ব্যবস্থার অগণিত কল্পিত অনুলিপির সমষ্টি, যা একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব $rho(mathbfq, mathbfp, t)$ দ্বারা নির্দেশিত হয়।

লিওভিলের উপপাদ্য: অসংকোচনীয় সিম্প্লেকটিক তরল

ফেজ স্পেসের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র আয়তন $dGamma = d^3Nq, d^3Np$-তে ব্যবস্থাটিকে খুঁজে পাওয়ার সম্ভাবনা $dP = rho(mathbfq, mathbfp, t), dGamma$। যেহেতু মোট সম্ভাবনা সর্বদা সংরক্ষিত—কোনো ব্যবস্থা নিজে থেকে সৃষ্টি বা ধ্বংস হতে পারে না—তাই সম্ভাবনার ঘনত্বকে ফেজ স্পেসে একটি অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণ (continuity equation) মেনে চলতে হয়:

$$fracpartial rhopartial t + nabla_Gamma cdot (rho dot mathbfx) = 0$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

হ্যামিল্টনের সমীকরণ ব্যবহার করে বেগের ডাইভারজেন্স বের করলে দেখা যায়:

frac{partial dot{q}_i}{partial q_i} + frac{partial dot{p}_i}{partial p_i} = frac{partial^2 H}{partial q_i partial p_i} – frac{partial^2 H}{partial p_i partial q_i} equiv 0

যেহেতু আংশিক ব্যবকলনের ক্রম অদলবদল করা যায়, তাই ফেজ স্পেসে হ্যামিল্টনীয় গতিবেগের ডাইভারজেন্স সর্বত্র নিখুঁতভাবে শূন্য! এর ফলে অবিচ্ছিন্নতার সমীকরণটি রূপ নেয় সম্পূর্ণ কনভেক্টিভ ডেরিভেটিভে:

$$fracdrhodt = fracpartialrhopartialt + rho, H = 0$$

এটাই হলো বিখ্যাত **লিওভিল উপপাদ্য**। এর অর্থ হলো, ফেজ স্পেসে যেকোনো কণার গতিপথ ধরে চললে সম্ভাবনার ঘনত্ব সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে। জ্যামিতিকভাবে ভাবলে, ফেজ স্পেসে এনসেম্বল প্রবাহিত হয় একটি **অসংকোচনীয় তরলের** মতো। শুরুর একটি বিন্দুপুঞ্জের আয়তন যদি $deltaGamma_0$ হয়, বিশৃঙ্খল সংঘর্ষে তা যতই লম্বা, বাঁকানো বা জালের মতো বিস্তৃত হোক না কেন, তার মোট ফেজ আয়তন চিরকাল অপরিবর্তিত থাকে।

পোঁয়ানকারে পুনরাবৃত্তি ও সাম্যাবস্থার অসঙ্গতি

১৮৯০ সালে অঁরি পোঁয়ানকারে লিওভিল উপপাদ্যের এক বিস্ময়কর অনুসিদ্ধান্ত প্রমাণ করেন। যদি একটি আবদ্ধ ব্যবস্থার শক্তি সসীম হয় (অর্থাৎ মোট সুগম্য ফেজ স্পেসের আয়তন Omega(E) < infty), তবে ব্যবস্থাটি যথেষ্ট দীর্ঘ সময় পর প্রায় নিশ্চিতভাবেই তার আদি অবস্থার অত্যন্ত কাছাকাছি ফিরে আসবে: একে বলা হয় **পোঁয়ানকারে রিকারেন্স টাইম**।

এই উপপাদ্য বিজ্ঞানীদের মাঝে গভীর বিতর্কের জন্ম দিল: যদি ফেজ আয়তন সংরক্ষিত থাকে এবং অণুগুলো আবার আগের অবস্থায় ফিরে আসতে বাধ্য হয়, তবে এন্ট্রপি বাড়ে কীভাবে? পানিতে এক ফোঁটা কালি পড়লে তা চিরতরে কেন মিশে যায়? উত্তর লুকিয়ে আছে সূক্ষ্ম (fine-grained) এবং স্থূল (coarse-grained) তথ্যের পার্থক্যে। তাত্ত্বিকভাবে সূক্ষ্ম আয়তন সংরক্ষিত থাকলেও, বিশৃঙ্খল গতি ফেজ স্পেসের প্রতিটি কোণে এত সূক্ষ্ম সুতোর মতো ছড়িয়ে পড়ে যে বাস্তব জগতের স্থূল পর্যবেক্ষণে কালি কখনোই আলাদা হতে পারে না—বরং তা চিরস্থায়ী সাম্যাবস্থায় পৌঁছে যায়।

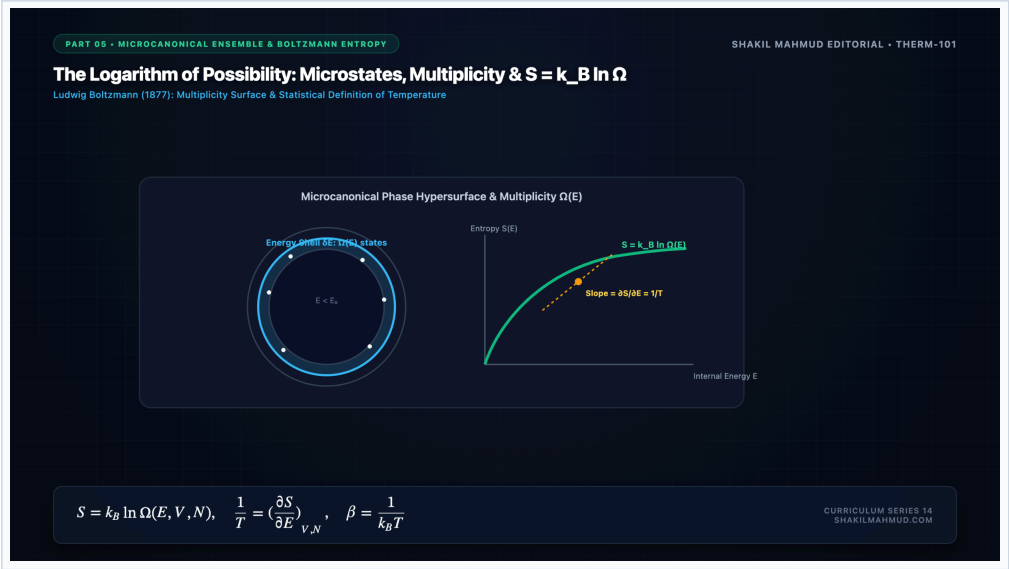
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "সিম্প্লেকটিক মহাসমুদ্র — হ্যামিল্টনীয় ফেজ স্পেস, লিওভিল উপপাদ্য ও মাইক্রোস্টেট"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ৪।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-4-phase-space-liouville-theorem-microstates-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • পঞ্চম খণ্ড

সম্ভাবনার লগারিদম — বোল্টজম্যান এনট্রপি, মাইক্রোস্টেট ও মাল্টিপ্লিসিটি

সম্ভাবনার লগারিদম — বোল্টজম্যান এনট্রপি, মাইক্রোস্টেট ও মাল্টিপ্লিসিটি

532 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৫: *মাইক্রোক্যানোনিকাল শক্তি স্তর ও ফেজ স্পেস সারফেস, এবং বোল্টজম্যানের সম্ভাবনা-ভিত্তিক এনট্রপি সমীকরণ $S = k_B \ln \Omega(E)$।*

ভিয়েনার সেন্ট্রাল সমাধিক্ষেত্রে লুডভিগ বোল্টজম্যানের স্মৃতিস্তম্ভের পাথরে একটিমাত্র সমীকরণ খোদাই করা আছে, যা পরমাণুর অদৃশ্য বলবিদ্যা এবং আমাদের ইন্দ্রিয়গ্রাহ্য জগতের মাঝে এক অমর সেতু রচনা করে: $S = klogW$। ১৮৭৭ সালে যখন বোল্টজম্যান এই সমীকরণ প্রস্তাব করেছিলেন, তখন আর্নস্ট মাখ ও উইলহেম অস্টওয়াল্ডের মতো প্রভাবশালী বিজ্ঞানীরা পরমাণুর অস্তিত্বকেই তীব্রভাবে অস্বীকার করতেন। বছরের পর বছর তীব্র মানসিক নির্যাতন, একাকীত্ব ও গভীর বিষণ্ণতায় ভেঙে পড়ে ১৯০৬ সালে বোল্টজম্যান আত্মহত্যা করেন—যার ঠিক দুই বছর পরেই জঁ পেরার ব্রাউনীয় গতির পরীক্ষা পরমাণুর বাস্তবতাকে অকাট্যভাবে প্রমাণ করেছিল। কিন্তু বোল্টজম্যানের সেই সমীকরণ আজও মানব বুদ্ধিবৃত্তির অন্যতম শ্রেষ্ঠ শৃঙ্গ হিসেবে দাঁড়িয়ে আছে।

পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যার মৌলিক স্বতঃসিদ্ধ

অণু-পরমাণুর গতিবিদ্যা থেকে ম্যাক্রোস্কোপিক তাপগতিবিদ্যায় পৌঁছানোর জন্য আমরা একটি সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থা বিবেচনা করি, যার মোট অভ্যন্তরীণ শক্তি E, আয়তন V এবং কণা সংখ্যা N নির্দিষ্ট। ফেজ স্পেস $Gamma$-তে এই ব্যবস্থাটি একটি নির্দিষ্ট শক্তি স্তরের পৃষ্ঠে অবস্থান করে। যেহেতু লিওভিলের উপপাদ্য প্রমাণ করে যে ফেজ স্পেসের প্রবাহ আয়তন সংরক্ষণ করে, তাই গিবস ও বোল্টজম্যান প্রতিষ্ঠা করেন **সমান পূর্ব-সম্ভাব্যতার মৌলিক স্বতঃসিদ্ধ (Equal A Priori Probability Postulate)**:

> *তাপীয় সাম্যাবস্থায় থাকা যেকোনো বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থার জন্য নির্দিষ্ট ম্যাক্রোস্টেট (E, V, N)-এর সাথে সংগতিপূর্ণ প্রতিটি গ্রহণযোগ্য মাইক্রোস্টেটের সংঘটিত হওয়ার সম্ভাবনা সমান।*

ধরা যাক, $[E, E + deltaE]$ শক্তি স্তরের মধ্যে মোট গ্রহণযোগ্য মাইক্রোস্টেটের সংখ্যা (বা ফেজ আয়তন) হলো $Omega(E, V, N)$:

$$Omega(E,V,N) = frac1N!, h^{3N} int_{EleH(mathbfq,mathbfp)leE+deltaE} d^{3N}q, d^{3N}p$$

এখানে h^{3N} ফ্যাক্টরটি অবিচ্ছিন্ন ফেজ স্পেসকে কোয়ান্টাম কোষের মাধ্যমে পূর্ণসংখ্যার গণনায় রূপান্তর করে, এবং $N!$ ফ্যাক্টরটি অভিন্ন কণাগুলোর কোয়ান্টাম অভেদযোগ্যতা নিশ্চিত করে গিবসের বিখ্যাত প্যারাডক্স দূর করে।

সম্ভাবনা পৃষ্ঠ ও এন্ট্রপির পরিসংখ্যানিক রূপ

এন্ট্রপি কেন $Omega$-এর লগারিদমের সমানুপাতিক হবে? দুটি সম্পূর্ণ স্বাধীন বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থা A এবং B বিবেচনা করা যাক, যাদের মোট মাইক্রোস্টেট যথাক্রমে $Omega_A$ এবং $Omega_B$। যেহেতু তাদের মাইক্রোস্টেটগুলো স্বাধীনভাবে যুক্ত হতে পারে, তাই যৌথ ব্যবস্থার মোট সম্ভাবনা সংখ্যা হবে গুণাত্মক:

$$Omega_{AB} = Omega_A times Omega_B$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

কিন্তু তাপগতিবিদ্যা অনুসারে এন্ট্রপি একটি **বিস্তৃত (extensive) ধর্ম**—অর্থাৎ দুটি ব্যবস্থার মোট এন্ট্রপি হবে তাদের যোগফলের সমান:

$$S_{AB} = S_A + S_B$$

গণিতে কেবল একটিমাত্র অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক গুণফলকে যোগফলে রূপান্তর করতে পারে, আর তা হলো লগারিদম: $f(xcdoty) = f(x) + f(y) if f f(x) = klnx$। এভাবেই বোল্টজম্যান তার কালজয়ী সমীকরণ আবিষ্কার করেন:

$$S = k_B lnOmega(E, V, N)$$

যেখানে $k_B = ১.৩৮০৬৪৯times১০^{-২৩}, textJ/K$ হলো বোল্টজম্যান ধ্রুবক। এন্ট্রপি কোনো রহস্যময় তরল নয়; এটি কেবল একটি নির্দিষ্ট দৃশ্যমান দশার সাথে সংগতিপূর্ণ কোটি কোটি অণুর অভ্যন্তরীণ বিন্যাস সংখ্যার লগারিদমিক পরিমাপ।

তাপমাত্রার প্রতিপাদন ও সাকুর-টেট্রোড সমীকরণ

দুটি বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থা A_1 ও A_2 তাপীয় সংস্পর্শে এলে তাদের শক্তি বিনিময় ঘটে, কিন্তু মোট শক্তি $E = E_1 + E_2$ স্থির থাকে। সাম্যাবস্থায় ব্যবস্থাটি সর্বাধিক সম্ভাবনাময় ম্যাক্রোস্টেটে পৌঁছায় ($fracpartiallnOmega_texttotpartialE_1 = 0$):

$$left(fracpartialS_1partialE_1right)_{V_1,N_1} = left(fracpartialS_2partialE_2right)_{V_2,N_2} equiv frac1T$$

এটাই হলো নিখুঁত গণনার মাধ্যমে পরম তাপমাত্রার সংজ্ঞা: তাপমাত্রা হলো অভ্যন্তরীণ শক্তি বৃদ্ধির সাথে সাথে মাইক্রোস্টেটের সংখ্যার লগারিদম পরিবর্তনের হারের ব্যস্তানুপাতিক।

এক-পরমাণুক আদর্শ গ্যাসের ফেজ আয়তন সমাকলন করে ১৯১২ সালে অটো সাকুর ও হুগো টেট্রোড প্রতিষ্ঠা করেন বিখ্যাত **সাকুর-টেট্রোড সমীকরণ**:

$$S(E, V, N) = Nk_Bleft[lnleft(fracVNleft(frac4pimE3Nh^2right)^{3/2}right) + frac52right]$$

এই সমীকরণটি পরমাণুর ভর m এবং প্লাঙ্কের কোয়ান্টাম ধ্রুবক h-কে সরাসরি বাষ্পীয় ইঞ্জিন ও তাপমাপক যন্ত্রে মাপা বাস্তব ম্যাক্রোস্কোপিক এন্ট্রপির সাথে নিখুঁতভাবে যুক্ত করে।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "সম্ভাবনার লগারিদম — বোল্টজম্যান এনট্রপি, মাইক্রোস্টেট ও মাল্টিপ্লিসিটি"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ৫। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-5-boltzmann-entropy-microstates-multiplicity-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ষষ্ঠ খণ্ড

সময়ের তির — বোল্টজম্যানের এইচ-থিওরেম, আণবিক বিশৃঙ্খলা ও লশমিটের প্যারাডক্স

সময়ের তির — বোল্টজম্যানের এইচ-থিওরেম, আণবিক বিশৃঙ্খলা ও লশমিটের প্যারাডক্স

628 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৬: *বোল্টজম্যানের এইচ-থিওরেমের একমুখী পতন এবং লশমিটের বেগ বিপরীতমুখী অসঙ্গতির বিপরীতে আণবিক বিশৃঙ্খলার চিরস্থায়ী রূপ।*

নিউটনের গতিসূত্রের একটি অসাধারণ গাণিতিক প্রতিসাম্য রয়েছে: তারা সময়ের বিপরীতে সম্পূর্ণ অপরিবর্তনশীল ($tto -t$)। দুটি বিলিয়ার্ড বলের স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের ভিডিও ধারণ করে উল্টো চালালে মেকানিক্সের কোনো সূত্রই ভঙ্গ হয় না। তবে বাস্তব ম্যাক্রোস্কোপিক জগতে হাত থেকে ফেলে দেওয়া সিরামিকের কফি মগ ভেঙে মেঝেতে গুঁড়ো গুঁড়ো হয়ে যায়, কিন্তু মেঝের ভাঙা টুকরোগুলো কখনোই নিজে থেকে জোড়া লেগে লাফিয়ে আবার আপনার হাতে ফিরে আসে না কেন? একটি ভাজা ডিমকে কেন কখনো আগের কাঁচা অবস্থায় ফিরিয়ে আনা যায় না? ১৮৭২ সালে লুডভিগ বোল্টজম্যান মেকানিক্সের মাধ্যমে এন্ট্রপির বৃদ্ধির প্রমাণ দিতে প্রতিষ্ঠা করেন **এইচ-থিওরেম (H-Theorem)**। আর এর মাধ্যমেই বিজ্ঞানের ইতিহাসে অন্যতম গভীর দার্শনিক বিতর্কের সূচনা হয়: সময়ের তিরের উৎস (The Arrow of Time)।

বোল্টজম্যান ট্রান্সপোর্ট সমীকরণ ও এইচ-ফাংশনাল

একটি সাম্যাবস্থাহীন গ্যাসের কালানুক্রমিক পরিবর্তন পর্যবেক্ষণ করতে বোল্টজম্যান একক-কণা বণ্টন অপেক্ষক $f(mathbfr, mathbfv, t)$ প্রবর্তন করেন। সংঘর্ষহীন অবস্থায় লিওভিল উপপাদ্য অনুযায়ী $df/dt = 0$। কিন্তু কণাগুলোর মধ্যকার দ্বিপাক্ষিক সংঘর্ষ বিবেচনা করে বোল্টজম্যান তৈরি করেন তার যুগান্তকারী সমীকরণ:

$$fracpartialfpartialt + mathbfvcdotnabla_mathbfrf + fracmathbfFmcdotnabla_mathbfvf = left(fracpartialfpartialtright)_textcoll$$

সংঘর্ষ সমাকলন হিসাব করতে গিয়ে বোল্টজম্যান একটি বৈপ্লবিক অনুমান করেন—**আণবিক বিশৃঙ্খলা অনুমান (Stosszahlansatz)**: তিনি ধরে নেন যে দুটি কণা সংঘর্ষের ঠিক পূর্বমুহূর্তে পরিসংখ্যানগতভাবে সম্পূর্ণ স্বাধীন ও অসংলগ্ন থাকে: $f_2(mathbfv_1, mathbfv_2) = f(mathbfv_1)f(mathbfv_2)$। এই অনুমানের ওপর ভিত্তি করে তিনি $H(t)$ ফাংশনাল সংজ্ঞায়িত করেন:

$$H(t) = intf(mathbfv,t)lnf(mathbfv,t),d^3v$$

যেহেতু $flnf$ হলো ঋণাত্মক এন্ট্রপি ঘনত্ব, তাই $H(t)$ সরাসরি তাপগতিবিদ্যার ঋণাত্মক এন্ট্রপির সমানুপাতিক: $S(t) = -k_BH(t)$। সময়ের সাপেক্ষে ব্যবকলন করে সংঘর্ষের সূত্র বসালে বোল্টজম্যান প্রমাণ করেন তার ঐতিহাসিক এইচ-থিওরেম:

$$fracdHdtle0iffffracdSdtge0$$

বোল্টজম্যান বিশ্বাস করেছিলেন যে তিনি নিউটনের প্রত্যাবর্তী মেকানিক্স থেকে তাপগতিবিদ্যার অপ্রত্যাবর্তী দ্বিতীয় সূত্রকে সম্পূর্ণ যান্ত্রিকভাবে প্রতিপাদন করে ফেলেছেন।

Shakil Mahmud • Research Monograph

লশমিটের প্যারাডক্স ও প্রতিসাম্য বিতর্ক

বোল্টজম্যানের ভিয়েনা বিশ্ববিদ্যালয়ের সহকর্মী জোসেফ লশমিট এতে এক বিরাট যৌক্তিক অসঙ্গতি (Umkehreinwand) ধরিয়ে দেন:

> *যদি কণাগুলোর গতিবিদ্যা সম্পূর্ণ প্রত্যাবর্তী নিউটোনীয় সূত্র মেনে চলে, তবে এমন যেকোনো গতিপথ যার ফলে H হ্রাস পায় (অর্থাৎ এন্ট্রপি বাড়ে), তার প্রতিটি কণার ভরবেগকে যদি তাৎক্ষণিকভাবে উল্টে দেওয়া হয় ($mathbf{p}_i to -mathbf{p}_i$), তবে যান্ত্রিক সূত্র অনুযায়ী কণাগুলো হুবহু আগের পথ বেয়ে ফিরে যেতে বাধ্য এবং সেখানে H বৃদ্ধি পাবে! সুতরাং কোনো যান্ত্রিক নিয়ম কখনো $dH/dtle0$ বাধ্যতামূলক করতে পারে না।*

লশমিটের এই আপত্তি পদার্থবিজ্ঞানের ভিত্তিমূলে আঘাত করেছিল: সম্পূর্ণ কাল-প্রতিসম মেকানিক্স থেকে সময়ের একমুখী অসমতা কীভাবে তৈরি হতে পারে?

আণবিক বিশৃঙ্খলা ও পরিসংখ্যানিক সমাধান

বোল্টজম্যান উপলব্ধি করেন যে সময়ের অসমতা মূলত তার **আণবিক বিশৃঙ্খলা অনুমানের** ভেতর লুকিয়ে ছিল। সংঘর্ষের পূর্বে কণা দুটিকে স্বাধীন ধরে নেওয়ার মাধ্যমেই তিনি সমীকরণে একটি সময়ের দিক ঢুকিয়ে দিয়েছিলেন। বাস্তবে সংঘর্ষের পর কণা দুটির মধ্যে গভীর কোরিলেশন সৃষ্টি হয়। যদি আপনি সমস্ত ভরবেগ উল্টে দেন, তবে সেই কণাগুলো অতিসূক্ষ্ম কোরিলেশন ধারণ করে আগের পথে ফিরবে—যা বিশৃঙ্খলা অনুমানকে সরাসরি লঙ্ঘন করে। এমন মাইক্রোস্টেট তাত্ত্বিকভাবে সম্ভব হলেও ফেজ স্পেসে তাদের আয়তন অত্যন্ত নগণ্য।

এন্ট্রপির বৃদ্ধি কোনো পরম যান্ত্রিক বাধ্যবাধকতা নয়; এটি হলো এক অবিশ্বাস্য **পরিসংখ্যানিক স্বাভাবিকতা (Statistical Typicality)**। ফেজ স্পেসের মোট আয়তনের ৯৯.৯৯৯৯...% অংশ দখল করে থাকে সর্বোচ্চ এন্ট্রপির সাম্যাবস্থা। যেকোনো বিশৃঙ্খল ব্যবস্থার সাম্যাবস্থায় যাওয়ার সম্ভাবনা এত বেশি কেবল এই কারণে যে সুশৃঙ্খল থাকার চেয়ে বিশৃঙ্খল হওয়ার উপায় কোটি কোটি গুণ বেশি।

অতীত স্বতঃসিদ্ধ (The Past Hypothesis) ও মহাজাগতিক রহস্য

এই পরিসংখ্যানিক সমাধান বিজ্ঞানে এক আরও গভীর মহাজাগতিক প্রশ্নের জন্ম দিল: যদি সর্বোচ্চ এন্ট্রপিই সবচেয়ে স্বাভাবিক হয়, তবে আজ আমাদের মহাবিশ্ব সাম্যাবস্থায় পৌঁছে সম্পূর্ণ মৃত হয়ে নেই কেন? কেন আজও নক্ষত্র জ্বলে, সূর্য আলো দেয় এবং জীবনের অস্তিত্ব টিকে আছে?

আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানী রিচার্ড ফাইনম্যান ও রজার পেনরোজ দেখিয়েছেন, তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র আজ কাজ করছে কেবল এই কারণে যে ১৩.৮ বিলিয়ন বছর পূর্বে মহাবিস্ফোরণের প্রারম্ভে আমাদের মহাবিশ্ব এক অবিশ্বাস্য রকমের নিম্ন এন্ট্রপিতে শুরু হয়েছিল (**The Past Hypothesis**)। আদি মহাবিশ্বে মহাকর্ষীয়ভাবে পদার্থ এত মসৃণ ও সমভাবে বণ্টিত ছিল যে তা এক সুবিশাল ঋণাত্মক এন্ট্রপির ভাণ্ডার তৈরি করেছিল। আজ পৃথিবীতে এন্ট্রপির প্রতিটি বৃদ্ধি—কয়লা পোড়ানো থেকে শুরু করে আমাদের মস্তিষ্কের নিউরনের স্পন্দন—সেই আদিম মহাজাগতিক ঘড়ির অবিরাম ধীরগতির নিঃসরণ মাত্র।

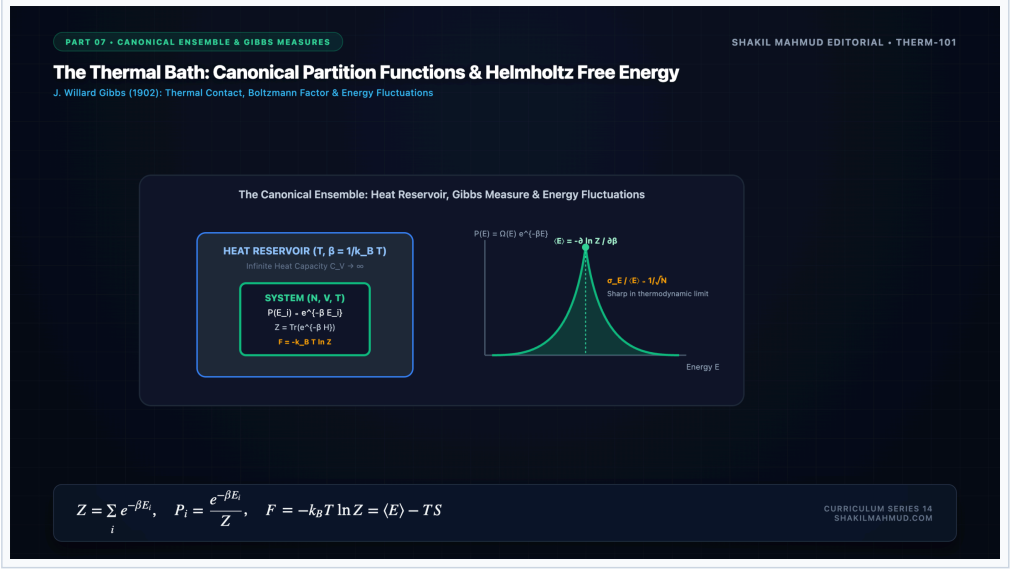
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "সময়ের তির — বোল্টজম্যানের এইচ-থিওরেম, আণবিক বিশৃঙ্খলা ও লশমিটের প্যারাডক্স"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ৬।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-6-h-theorem-molecular-chaos-loschmidt-paradox-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • সপ্তম খণ্ড

তাপীয় আধার — ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, পার্টিশন ফাংশন ও মুক্ত শক্তি

তাপীয় আধার — ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, পার্টিশন ফাংশন ও মুক্ত শক্তি

515 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৭: *ক্যানোনিকাল তাপীয় সংযোগ, গিবস মেজার বোল্টজম্যান ফ্যাক্টর এবং $1/\sqrt{N}$ আনুপাতিক অতিসূক্ষ্ম শক্তি বিচ্যুতির বণ্টন।*

লুডভিগ বোল্টজম্যানের মাইক্রোক্যানোনিকাল এনসেম্বলে একটি ব্যবস্থাকে সম্পূর্ণ অন্তরকযুক্ত দৃঢ় প্রাচীরের ভেতর আবদ্ধ রাখা হয়, যেখানে মোট শক্তি চিরকাল স্থির। কিন্তু আমাদের চেনা মহাবিশ্বের প্রায় কিছুই পুরোপুরি বিচ্ছিন্ন নয়। টেবিলে রাখা এক কাপ কফি চারপাশের বায়ুমণ্ডলের সাথে অনবরত তাপীয় শক্তি বিনিময় করছে। জীবকোষের ডিএনএ অণু ৩১০ কেলভিন তাপমাত্রার অবিরাম পানির অণুর ধাক্কা সহ্য করছে। কোনো বিশাল তাপীয় আধারের সাথে সাম্যাবস্থায় থাকা যেকোনো বাস্তব ব্যবস্থাকে ব্যাখ্যা করতে আমেরিকান পদার্থবিদ জোসিয়াহ উইলার্ড গিবস আবিষ্কার করেন **ক্যানোনিকাল এনসেম্বল (Canonical Ensemble)**। আর এর কেন্দ্রবিন্দুতে রয়েছে আধুনিক তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানের সবচেয়ে শক্তিশালী গাণিতিক যন্ত্র: পার্টিশন ফাংশন।

বোল্টজম্যান ফ্যাক্টর ও সম্ভাবনার প্রতিপাদন

বিশাল তাপীয় আধার R-এর সাথে তাপীয় সংস্পর্শে থাকা একটি ক্ষুদ্র ব্যবস্থা S বিবেচনা করা যাক। সামগ্রিক ব্যবস্থা $S + R$ সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন এবং মোট শক্তি $E_{texttot} = E_i + E_R$ ধ্রুবক, যেখানে E_i হলো S-এর একটি নির্দিষ্ট মাইক্রোস্টেটের শক্তি। যেহেতু আধারটি সুবিশাল ($E_R gg E_i$), তাই এর স্বাধীনতার মাত্রা উপব্যবস্থার চেয়ে কোটি কোটি গুণ বেশি।

পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যার স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী, ব্যবস্থাটি E_i শক্তিতে থাকার সম্ভাবনা P_i সরাসরি আধারের গ্রহণযোগ্য মাইক্রোস্টেটের সংখ্যা Omega_R(E_{text{tot}} – E_i)-এর সমানুপাতিক:

P_i propto Omega_R(E_{text{tot}} – E_i) = expleft(frac{S_R(E_{text{tot}} – E_i)}{k_B} right)

যেহেতু $E_i ll E_{texttot}$, তাই আধারের এন্ট্রপিকে টেইলর ধারায় বিস্তৃত করা যায়:

S_R(E_{text{tot}} – E_i) approx S_R(E_{text{tot}}) – E_i left(frac{partial S_R}{partial E_R} right) = S_R(E_{text{tot}}) – frac{E_i}{T}

উচ্চতর পদগুলোর মান শূন্যে মিলিয়ে যায় কারণ আধারের তাপধারণ ক্ষমতা অসীম ($C_R to infty$)। ফলে আমরা পাই বিশ্বখ্যাত **বোল্টজম্যান ফ্যাক্টর**:

$$P_i propto exp left(-frac{E_i}{k_B T} right) = e^{-beta E_i}$$

যেখানে $beta equiv frac{1}{k_B T}$ হলো তাপগতিবিদ্যার বিপরীতমুখী তাপমাত্রা।

Shakil Mahmud • Research Monograph

ক্যানোনিকাল পার্টিশন ফাংশন: তাপগতিবিদ্যার মূল চাবিকাঠি

সম্ভাবনার যোগফলকে ১ করার জন্য সমস্ত মাইক্রোস্টেটের ওপর বোল্টজম্যান ফ্যাক্টরের সমষ্টি নেওয়া হয়, যাকে ম্যাক্স প্লাঙ্ক ও গিবস নাম দেন **Zustandssumme** বা **ক্যানোনিকাল পার্টিশন ফাংশন** (Z):

$$Z = sum_i e^{-betaE_i}$$

পার্টিশন ফাংশন কেবল একটি সাধারণ ধ্রুবক নয়; এটি তাপগতিবিদ্যার সকল দৃশ্যমান ধর্মাবলীর জন্মদাত্রী গাণিতিক উৎস। এর লগারিদমিক ব্যবকলন থেকেই নিখুঁতভাবে বেরিয়ে আসে সকল ভৌত রাশি:

- **গড় অভ্যন্তরীণ শক্তি** $langleErangle$:

$$langleErangle = sum_i E_i P_i = -fracpartiallnZpartialbeta$$

- **শক্তির বিচ্যুতি ও তাপধারণ ক্ষমতা:**

sigma_E^2 = langle E^2 rangle – langle E rangle^2 = frac{partial^2 ln Z}{partial beta^2} = k_B T^2 C_V

Z থেকে হেলমহোল্টজ মুক্ত শক্তি

পার্টিশন ফাংশনের এই আণুবীক্ষণিক সমষ্টির সাথে ম্যাক্রোস্কোপিক তাপগতিবিদ্যার সরাসরি সম্পর্ক কী? ক্যানোনিকাল বণ্টনের জন্য গিবস এন্ট্রপি হিসাব করলে পাওয়া যায়:

S = -k_B sum_{i} P_i ln P_i = frac{langle E rangle}{T} + k_B ln Z implies -k_B T ln Z = langle E rangle – T S

একে **হেলমহোল্টজ মুক্ত শক্তি** F = U – TS-এর সাথে তুলনা করলেই পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যার সেই মহান সমীকরণটি বেরিয়ে আসে:

$$F = -k_B T ln Z$$

ম্যাক্রোস্কোপিক জগতের পরম স্থায়িত্ব

ক্যানোনিকাল এনসেম্বলে ব্যবস্থাটির শক্তি স্থির নয়; আধারের সাথে তা অনবরত শক্তি আদান-প্রদান করে ওঠানামা করে। তবে টেবিলে রাখা এক গ্লাস পানির শক্তি কেন কখনোই দৃশ্যমানভাবে পরিবর্তিত হয় না? এর উত্তর লুকিয়ে আছে আপেক্ষিক শক্তিব্যবধানে:

$$fracsigma_E langleErangle = fracsqrtk_B T^2 C_V langleErangle propto fracsqrtNN = frac1sqrtN$$

যেহেতু সাধারণ বস্তুতে পরমাণুর সংখ্যা $Napprox১০^{২৩}$, তাই শক্তির আপেক্ষিক তারতম্য ঘটে মাত্র $১০^{-১১.৫}$ মাত্রায়—যা পৃথিবীর যেকোনো অতিসংবেদনশীল পরিমাপক যন্ত্রের সীমার চেয়েও কোটি গুণ সূক্ষ্ম! ফলে বাস্তব জগতে ক্যানোনিকাল এনসেম্বল হুবহু মাইক্রোক্যানোনিকাল এনসেম্বলের মতো পরম স্থির আচরণ প্রদর্শন করে।

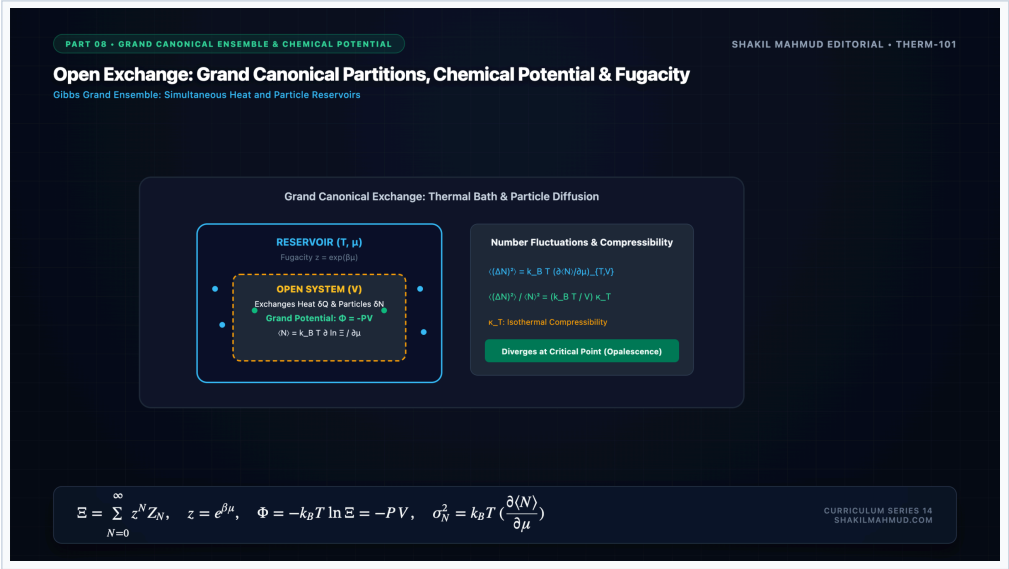
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "তাপীয় আধার — ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, পার্টিশন ফাংশন ও মুক্ত শক্তি"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ৭। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-7-canonical-ensemble-partition-functions-free-energy-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • অষ্টম খণ্ড

উন্মুক্ত বিনিময় — গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, রাসায়নিক বিভব ও কণা বিস্তার

উন্মুক্ত বিনিময় — গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, রাসায়নিক বিভব ও কণা বিস্তার

581 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৮: *গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল শক্তি ও কণা বিনিময়, ফুগাসিটি $z = exp(\beta\mu)$ এবং সমোষ্ণ সংকোচনশীলতার সাথে সম্পর্কিত কণা ঘনত্বের উত্থান-পতন।*

ক্যানোনিকাল এনসেম্বলে একটি ব্যবস্থা তার পারিপার্শ্বিকের সাথে তাপ বিনিময় করতে পারলেও কণাগুলো আবদ্ধ পাত্রের ভেতর বন্দি থাকে। কিন্তু প্রকৃতির অধিকাংশ বাস্তব প্রক্রিয়া—স্নায়ুকোষের সিন্যাপ্স জুড়ে নিউরোট্রান্সমিটারের বিচ্ছুরণ, রক্তে হিমোগ্লোবিনের সাথে অক্সিজেনের সংযোগ, কিংবা ফুটন্ত তরল ও বাষ্পের মধ্যকার দশা পরিবর্তন—এমন উন্মুক্ত সীমানায় ঘটে যেখানে শক্তি এবং কণা উভয়ই স্বাধীনভাবে আদান-প্রদান হতে পারে। এই ধরনের উন্মুক্ত ব্যবস্থাগুলোকে তাত্ত্বিকভাবে ব্যাখ্যা করতে জোসিয়াহ উইলার্ড গিবস আবিষ্কার করেন চিরায়ত পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যার সবচেয়ে পরাক্রমশালী কাঠামো: **গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল এনসেম্বল (Grand Canonical Ensemble)**।

গ্র্যান্ড আধার ও রাসায়নিক বিভব (Chemical Potential)

V আয়তনের একটি উপব্যবস্থা বিবেচনা করা যাক, যা একই সাথে তাপমাত্রা T এবং **রাসায়নিক বিভব** mu ধারণকারী এক সুবিশাল আধারের সাথে শক্তি ও কণা বিনিময় করছে। সামগ্রিক বিশ্ব সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন, যেখানে মোট শক্তি $E_{texttot} = E + E_R$ এবং মোট কণা সংখ্যা $N_{texttot} = N + N_R$ ধ্রুবক।

উপব্যবস্থাটিতে ঠিক N সংখ্যক কণা এবং i-তম কোয়ান্টাম মাইক্রোস্টেট (শক্তি $E_{N,i}$) পাওয়ার সম্ভাবনা $P_{N,i}$ সরাসরি আধারের মাইক্রোস্টেট সংখ্যার সমানুপাতিক:

$$P_{N, i} propto Omega_R(E_{text{tot}} – E_{N, i}, N_{text{tot}} – N) = expleft(frac{S_R}{k_B} right)$$

শক্তি ও কণা সংখ্যা উভয়ের সাপেক্ষে আধারের এন্ট্রপিকে টেইলর ধারায় বিস্তৃত করলে পাওয়া যায়:

$$S_R approx S_R(E_{text{tot}}, N_{text{tot}}) – E_{N, i} left(frac{partial S_R}{partial E_R} right) – N left(frac{partial S_R}{partial N_R} right)$$

তাপগতিবিদ্যার মৌলিক সমীকরণ $dS = frac{1}{T} dE + frac{P}{T} dV – frac{mu}{T} dN$ থেকে আমরা জানি $(partial S_R / partial N_R) = -mu/T$। এর ফলে গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল সম্ভাবনা বণ্টনের মহান রূপটি বেরিয়ে আসে:

$$P_{N, i} propto expleft(-frac{E_{N, i} – mu N}{k_B T} right) = e^{-beta(E_{N, i} – mu N)} = z^N e^{-beta E_{N, i}}$$

এখানে $zequive^{betamu}$-কে বলা হয় **ফুগাসিটি (Fugacity)**—যা আধার থেকে কণাগুলোর উপব্যবস্থায় ছুটে আসার এক পরম তাপগতীয় পরিমাপ।

গ্র্যান্ড পার্টিশন ফাংশন ও গ্র্যান্ড পটেনশিয়াল

সম্ভাবনার যোগফলকে স্বাভাবিকীকরণ করতে সম্ভাব্য সকল কণা সংখ্যা $Nin 0, 1, 2, dots, infty$ এবং সকল কোয়ান্টাম মাইক্রোস্টেটের ওপর সমষ্টি নিলে পাওয়া যায় **গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল পার্টিশন ফাংশন (Xi)**:

Shakil Mahmud • Research Monograph

Xi(T, V, mu) = sum_{N=0}^{infty} sum_{i} e^{-beta(E_{N, i} – mu N)} = sum_{N=0}^{infty} z^N Z_N(T, V)

ম্যাক্রোস্কোপিক তাপগতিবিদ্যার সাথে এর সংযোগ স্থাপন করে সংজ্ঞায়িত করা হয় **গ্র্যান্ড পটেনশিয়াল** Phi **(ল্যান্ডউ মুক্ত শক্তি)**:

Phi(T, V, mu) = -k_B T ln Xi = U – TS – mu N

যেহেতু মৌলিক তাপগতীয় সম্পর্কে U – TS – mu N = -PV, তাই আমরা পাই এক অভূতপূর্ব ও চমকপ্রদ সমীকরণ:

$$Phi = -PV implies PV = k_B T ln Xi$$

চাপ ও আয়তনের গুণফল সরাসরি গ্র্যান্ড পার্টিশন ফাংশনের লগারিদমের সমান!

কণা সংখ্যার বিচ্যুতি ও সমোষ্ণ সংকোচনশীলতা

রাসায়নিক বিভব mu-এর সাপেক্ষে Xi-এর লগারিদমিক ব্যবকলন নিলে গড় কণা সংখ্যা $langle N rangle$ এবং কণা সংখ্যার উত্থান-পতনের বিস্তার $sigma_N^2$ পাওয়া যায়:

sigma_N^2 = langle N^2 rangle – langle N rangle^2 = k_B T left(frac{partial langle N rangle}{partial mu}right)_{T, V}

ম্যাক্সওয়েল সম্পর্ক ব্যবহার করে এই কণা বিচ্যুতির সমীকরণটিকে সরাসরি ম্যাক্রোস্কোপিক **সমোষ্ণ সংকোচনশীলতা (Isothermal Compressibility)** $kappa_T = -frac1V(partial V/partial P)_T$-এর সাথে যুক্ত করা যায়:

$$frac sigma_N^2 langle N rangle^2 = frac k_B T V kappa_T$$

এই ফলাফলটি তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানের এক অনন্য আবিষ্কার। এটি প্রমাণ করে যে অণু-পরমাণুর সংখ্যার অতিসূক্ষ্ম পরিসংখ্যানিক ওঠানামা সরাসরি পদার্থের যান্ত্রিক সংকোচন ক্ষমতার সাথে সম্পর্কিত। সাধারণ তরলে $kappa_T$-এর মান অত্যন্ত কম থাকায় কণা ঘনত্বের তারতম্য চোখে পড়ে না। কিন্তু কোনো পদার্থের তরল-গ্যাস **সন্ধিবিন্দুতে (Critical Point)** সংকোচনশীলতা অসীমের দিকে ধাবিত হয় ($kappa_T to infty$)।

সেই সন্ধিমুহূর্তে কণার ঘনত্বের ওঠানামা এত বিশালাকার হয়ে ওঠে যে তা দৃশ্যমান আলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমান আকার ধারণ করে। ফলে স্বচ্ছ তরলটি আলোকরশ্মিকে চারদিকে বিচ্ছুরিত করে হঠাৎ দুধের মতো সাদা ও অস্বচ্ছ হয়ে ওঠে—যাকে বলা হয় **ক্রিটিক্যাল অপালেসেন্স (Critical Opalescence)**। গিবসের গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল কাঠামোর মাধ্যমে পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা পদার্থের আণুবীক্ষণিক কণা বিনিময়কে দৃশ্যমান রূপান্তরের সাথে একীভূত করে।

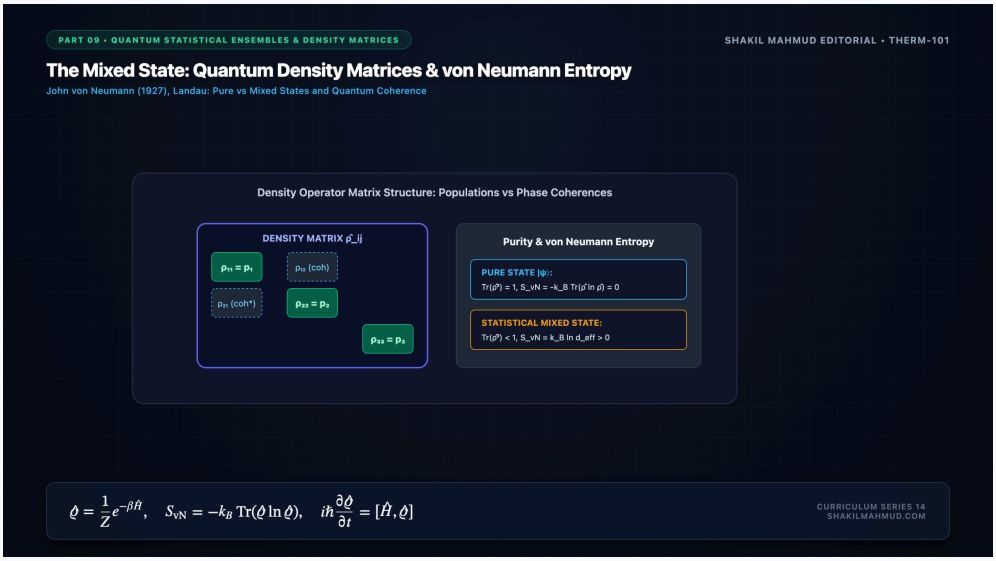
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "উন্মুক্ত বিনিময় — গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল এনসেম্বল, রাসায়নিক বিভব ও কণা বিস্তার"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ৮।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-8-grand-canonical-ensemble-chemical-potential-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • নবম খণ্ড

মিশ্র কোয়ান্টাম দশা — ডেনসিটি ম্যাট্রিক্স ও ফন নিউম্যান এনট্রপি

মিশ্র কোয়ান্টাম দশা — ডেনসিটি ম্যাট্রিক্স ও ফন নিউম্যান এনট্রপি

487 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৯: *কোয়ান্টাম ডেনসিটি ম্যাট্রিক্সের গঠন, যেখানে কর্ণের ক্লাসিক্যাল সম্ভাবনার সাথে অ-কর্ণীয় কোয়ান্টাম ফেজ কোহেরেন্স আলাদা দেখানো হয়েছে।*

চিরায়ত পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যায় অনিশ্চয়তা ছিল নিছক অজ্ঞতাপ্রসূত: প্রতিটি পরমাণুর নির্দিষ্ট অবস্থান ও ভরবেগ থাকলেও $১০^{২৩}$টি স্থানাঙ্ক একসাথে মাপা আমাদের পক্ষে অসম্ভব ছিল। কিন্তু কোয়ান্টাম জগতে অনিশ্চয়তা সহজাত ও মৌলিক। একটি আণুবীক্ষণিক কণা একই সাথে একাধিক অবস্থার উপরিপাতনে (quantum superposition) থাকতে পারে, কিন্তু যখন এটি একটি ম্যাক্রোস্কোপিক তাপীয় পরিবেশের সংস্পর্শে আসে, তখন কোয়ান্টাম ফেজের সূক্ষ্ম ব্যতিচার নষ্ট হয়ে ক্লাসিক্যাল সম্ভাবনায় পরিণত হয়। ১৯২৭ সালে হাঙ্গেরীয় গণিতবিদ জন ভন নিউম্যান এবং সোভিয়েত পদার্থবিদ লেভ ল্যান্ডউ কোয়ান্টাম পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যার এক সার্বজনীন গাণিতিক ভাষা প্রতিষ্ঠা করেন: **ডেনসিটি ম্যাট্রিক্স তত্ত্ব (Density Matrix Formalism)**।

বিশুদ্ধ দশা বনাম পরিসংখ্যানিক মিশ্র দশা

প্রচলিত কোয়ান্টাম মেকানিক্সে একটি বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থাকে হিলবার্ট স্পেসের একটি স্টেট ভেক্টর $|psirangle$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যাকে বলা হয় **বিশুদ্ধ দশা (Pure State)**। এখানে যেকোনো পর্যবেক্ষণযোগ্য অপারেটর $hatA$-এর প্রত্যাশিত মান $langlehatArangle = langlepsi|hatA|psirangle$। কিন্তু তাপীয় ব্যবস্থায় আমরা দ্বিমুখী অনিশ্চয়তার মুখোমুখি হই: প্রথমত প্রকৃতির সহজাত কোয়ান্টাম অনিশ্চয়তা, এবং দ্বিতীয়ত ব্যবস্থাটি ঠিক কোন কোয়ান্টাম অবস্থায় প্রস্তুত হয়েছে তা না জানার চিরায়ত পরিসংখ্যানিক অজ্ঞতা।

ধরা যাক, ব্যবস্থাটি p_i সম্ভাবনাসহ $|psi_irangle$ অবস্থায় থাকার সম্ভাবনা রয়েছে। তখন $hatA$-এর গড় মান হিসাব করতে ভন নিউম্যান সমস্ত এনসেম্বলকে একটি একক রৈখিক অপারেটরে আবদ্ধ করেন, যার নাম **ডেনসিটি অপারেটর ($hatrho$)**:

$$hatrho = sum_i p_i |psi_irangle langlepsi_i|$$

যেকোনো অর্থোনরমাল বেসিসের সাপেক্ষে অপারেটর ট্রেস (trace) গ্রহণ করে যেকোনো ভৌত রাশির গড় মান সরাসরি পাওয়া যায়:

$$langlehatArangle = operatornameTr(hatrhohatA)$$

ডেনসিটি ম্যাট্রিক্সের গাণিতিক বৈশিষ্ট্য

প্রতিটি বাস্তব ডেনসিটি ম্যাট্রিক্স চারটি অলঙ্ঘনীয় গাণিতিক শর্ত মেনে চলে:

1. **হারমিশিয়ান প্রতিসাম্য:** $hatrho^dagger = hatrho$, যা নিশ্চিত করে এর আইগেনমানগুলো সর্বদা বাস্তব সংখ্যা।
2. **ট্রেসের একক মান:** $operatornameTr(hatrho) = sum_i p_i = 1$, যা মোট সম্ভাবনার নিত্যতা নির্দেশ করে।
3. **ধনাত্মক সেমি-ডেফিনিটনেস:** যেকোনো স্টেট ভেক্টরের জন্য $langlephi|hatrho|phirangle ge 0$।

Shakil Mahmud • Research Monograph

4. **বিশুদ্ধতার মাপকাঠি:** $operatornameTr(hatrho^2)le1$। যদি ব্যবস্থাটি নিখুঁত বিশুদ্ধ অবস্থায় থাকে, তবেই কেবল $operatornameTr(hatrho^2) = 1$ হয়। যেকোনো মিশ্র দশার জন্য এর মান ১-এর কম।

শক্তির বেসিসে ডেনসিটি ম্যাট্রিক্সের কর্ণ উপাদানগুলো rho_{nn} নির্দেশ করে প্রতিটি শক্তিস্তরে কণা পাওয়ার ক্লাসিক্যাল সম্ভাবনা (populations), আর অ-কর্ণীয় উপাদানগুলো rho_{nm} ($nnem$) নির্দেশ করে বিভিন্ন কোয়ান্টাম স্তরের মধ্যকার ফেজ ব্যতিচার (quantum coherences)। তাপীয় ডিকোহেরেন্সের কারণে এই অ-কর্ণীয় উপাদানগুলো দ্রুত শূন্যে মিলিয়ে যায়।

ভন নিউম্যানের গতি সমীকরণ ও ভন নিউম্যান এন্ট্রপি

শ্রোডিঙ্গার সমীকরণ থেকে সরাসরি ডেনসিটি অপারেটরের কালানুক্রমিক পরিবর্তন প্রতিপাদিত হয়, যাকে বলা হয় **ভন নিউম্যান সমীকরণ** (লিওভিল উপপাদ্যের কোয়ান্টাম রূপ):

$$ihbarfracpartialhatrhopartialt = [hatH, hatrho]$$

তাপীয় সাম্যাবস্থায় ডেনসিটি অপারেটর সময়ের সাপেক্ষে স্থির থাকে ($partialhatrho/partialt = 0$), যার ফলে $[hatH, hatrho] = 0$। ক্যানোনিকাল এনসেম্বলে এর রূপ দাঁড়ায়:

$$hatrho_textcanonical = frac1Ze^-betahatH, quadZ = operatornameTr(e^-betahatH)$$

একটি কোয়ান্টাম পরিসংখ্যানিক ব্যবস্থার লুকায়িত তথ্যের ঘাটতি বা বিশৃঙ্খলা পরিমাপ করতে ভন নিউম্যান প্রতিষ্ঠা করেন বিখ্যাত কোয়ান্টাম এন্ট্রপি সমীকরণ:

$$S_textvN = -k_BoperatornameTr(hatrholnhatrho)$$

যেকোনো বিশুদ্ধ দশায় ভন নিউম্যান এন্ট্রপির মান নিখুঁত শূন্য ($S_textvN = 0$); আর d-মাত্রার হিলবার্ট স্পেসে সম্পূর্ণ বিশৃঙ্খল মিশ্র দশায় এর মান দাঁড়ায় $S_textvN = k_Blnd$। ভন নিউম্যানের হাত ধরে কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা এক অবিচ্ছেদ্য তত্ত্বে পরিণত হয়।

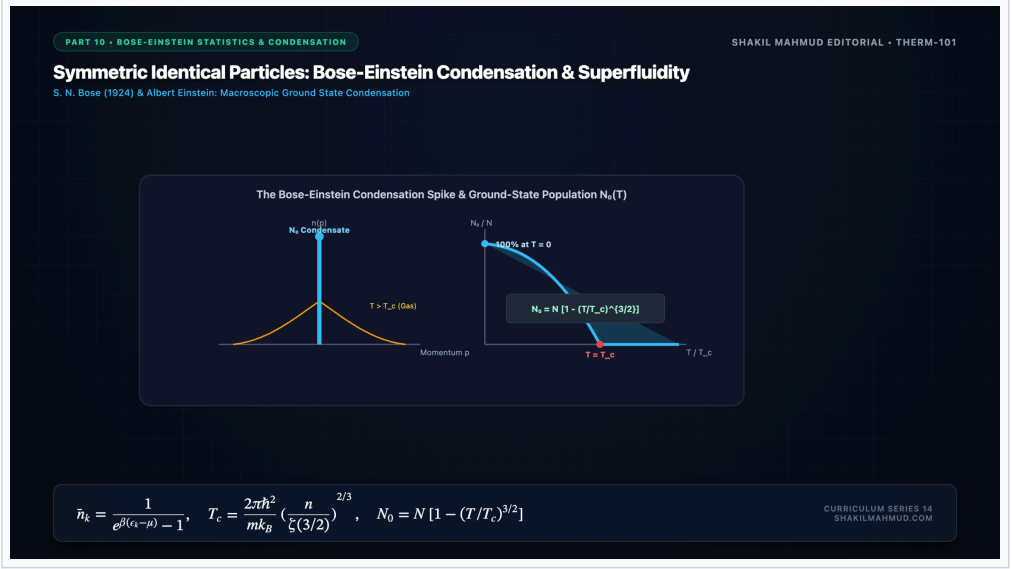
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "মিশ্র কোয়ান্টাম দশা — ডেনসিটি ম্যাট্রিক্স ও ফন নিউম্যান এন্ট্রপি"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ৯। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-9-quantum-density-matrices-von-neumann-entropy-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দশম খণ্ড

প্রতিসম অভিন্ন কণা — বোস-আইনস্টাইন পরিসংখ্যান ও কোয়ান্টাম ঘনীভবন

প্রতিসম অভিন্ন কণা — বোস-আইনস্টাইন পরিসংখ্যান ও কোয়ান্টাম ঘনীভবন

472 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১০: *ক্রিটিক্যাল তাপমাত্রার নিচে বোস-আইনস্টাইন ঘনীভবনের শূন্য ভরবেগে আকস্মিক ম্যাক্রোস্কোপিক কণা স্তূপ এবং ঘনীভূত ভগ্নাংশের লেখচিত্র।*

১৯২৪ সালের জুন মাসে ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের পদার্থবিজ্ঞান বিভাগের এক তরুণ অধ্যাপক সত্যেন্দ্রনাথ বসু বার্লিনে আলবার্ট আইনস্টাইনকে একটি স্বহস্তে লিখিত গবেষণাপত্র পাঠান। বসু কোনো ক্লাসিক্যাল তড়িচ্ছুম্বকীয় তত্ত্ব ব্যবহার না করেই সম্পূর্ণ নতুন ধরনের গণনা পদ্ধতির মাধ্যমে প্লাঙ্কের কৃষ্ণবস্তু বিকিরণ সূত্র প্রতিপাদন করেছিলেন, যেখানে তিনি আলোকে ভরহীন ও সম্পূর্ণ অভেদযোগ্য কণার এক ঝাঁক হিসেবে গণ্য করেন। আইনস্টাইন এই গবেষণার বৈপ্লবিক গুরুত্ব তাৎক্ষণিকভাবে বুঝতে পারেন। তিনি নিজে এটি জার্মান ভাষায় অনুবাদ করে *Zeitschrift für Physik* জার্নালে প্রকাশের ব্যবস্থা করেন এবং বসুর এই পদ্ধতিকে আলোর কণা থেকে ভরযুক্ত পরমাণুর গ্যাসে প্রয়োগ করেন। আর এর ফলেই উন্মোচিত হয় এক অবিশ্বাস্য সত্য: অতি-শীতল তাপমাত্রায় কোটি কোটি পরমাণু তাদের নিজস্ব স্বকীয়তা হারিয়ে একটি একক দানবীয় কোয়ান্টাম তরঙ্গে একীভূত হয়ে যাবে—যার নাম **বোস-আইনস্টাইন ঘনীভবন (Bose-Einstein Condensation)**।

কোয়ান্টাম অভেদযোগ্যতা ও বসুর পরিসংখ্যান

চিরায়ত পদার্থবিদ্যায় দুটি অভিন্ন কণাকে তাদের নির্দিষ্ট পথ ধরে আলাদা করা গেলেও কোয়ান্টাম মেকানিক্সে হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতির কারণে একই ধরনের কণাগুলো সম্পূর্ণ অভেদযোগ্য। যেসব কণার স্পিন পূর্ণসংখ্যা ($S = 0, 1, 2, dots$), তাদের বলা হয় **বোসন (Bosons)**। বোসনের বহু-কণা তরঙ্গ ফাংশন কণা স্থানান্তরের সাপেক্ষে সম্পূর্ণ প্রতিসম:

$$psi(dots, mathbf{r}_j, dots, mathbf{r}_k, dots) = +psi(dots, mathbf{r}_k, dots, mathbf{r}_j, dots)$$

একটি কোয়ান্টাম স্তরে কতগুলো বোসন থাকতে পারবে তার ওপর কোনো নিষেধাজ্ঞা না থাকায়, গ্র্যান্ড পার্টিশন ফাংশন প্রতিটি একক-কণা শক্তিস্তরের গুণফল হিসেবে লেখা যায়:

Xi_{text{Bose}} = prod_{k} frac{1}{1 – e^{-beta(epsilon_k – mu)}}

এই ধারাটি সসীম হওয়ার জন্য রাসায়নিক বিভবের সর্বোচ্চ সীমা নির্ধারিত হয়: $mule0$। এর ব্যবকলন থেকে পাওয়া যায় বিশ্বখ্যাত **বোস-আইনস্টাইন বণ্টন সমীকরণ**:

bar{n}_k = frac{1}{e^{beta(epsilon_k – mu)} – 1}

ঘনীভবন প্রক্রিয়া ও সন্ধি তাপমাত্রা

মোট কণা সংখ্যা N হিসাব করতে আমরা ভূমি স্তরের কণা N_0 এবং উত্তেজিত স্তরের কণাকে আলাদা করি। তাপমাত্রা হ্রাস পেতে থাকলে ফুগাসিটি $z = e^{betamu}$ তার সর্বোচ্চ তাত্ত্বিক সীমা $zto1$-এ পৌঁছায়। এই সন্ধিমুহূর্তে উত্তেজিত স্তরগুলো পুরোপুরি কণা দ্বারা সম্পৃক্ত হয়ে যায়—তারা আর একটি অতিরিক্ত কণাও ধারণ করতে পারে না!

যে তাপমাত্রায় এই কোয়ান্টাম সম্পৃক্ততা ঘটে, তাকে বলা হয় **সন্ধি তাপমাত্রা (T_c)**:

Shakil Mahmud • Research Monograph

$$T_c = frac2pihbar^2mk_Bleft(fracN/Vzeta(3/2)right)^{2/3}$$

তাপীয় দ্য ব্রয় তরঙ্গদৈর্ঘ্য $lambda_texttth = sqrtfrac2pihbar^2mk_BT$-এর সাহায্যে একে ব্যাখ্যা করলে দেখা যায়: যখন পরমাণুগুলোর তরঙ্গদৈর্ঘ্য তাদের পারস্পরিক দূরত্বের চেয়ে বড় হয়ে একে অপরকে ঢেকে ফেলে ($nlambda^3_texttthge২.৬১২$), তখনই এই ঘনীভবন শুরু হয়।

ম্যাক্রোস্কোপিক কোয়ান্টাম কোহেরেন্স

T_c-এর নিচে অতিরিক্ত সমস্ত পরমাণু কোয়ান্টাম মেকানিক্সের এক অদৃশ্য নিয়মে সরাসরি শূন্য ভরবেগের ভূমিস্তরে ($epsilon_0 = 0$) পতিত হয়:

frac{N_0(T)}{N} = 1 – left(frac{T}{T_c}right)^{3/2}

এই দশা রূপান্তরের পেছনে পরমাণুগুলোর মধ্যকার কোনো বলের প্রয়োজন হয় না—এটি ঘটে কেবল কোয়ান্টাম পরিসংখ্যানের শক্তিতে। ঘনীভূত অবস্থায় কোটি কোটি স্বাধীন পরমাণু একই সাথে একটি একক ম্যাক্রোস্কোপিক তরঙ্গ ফাংশন ধারণ করে, যার ফলে জন্ম নেয় শূন্য সান্দ্রতা, সুপারফ্লুইডিটি এবং কোয়ান্টাম ঘূর্ণাবর্ত।

১৯৯৫ সালে এরিক কর্নেল ও কার্ল ওয়াইম্যান লেজার শীতলীকরণ প্রযুক্তির সাহায্যে রুবিডিয়াম পরমাণুকে মাত্র ১৭০ ন্যানোকেলভিন তাপমাত্রায় নামিয়ে গবেষণাগারে প্রথম বিশুদ্ধ বোস-আইনস্টাইন ঘনীভবন তৈরি করে ২০০১ সালে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন। সত্যেন্দ্রনাথ বসু ও আইনস্টাইনের সেই স্বপ্নিল ভবিষ্যদ্বাণী মানবজাতির সামনে বাস্তব রূপ লাভ করে।

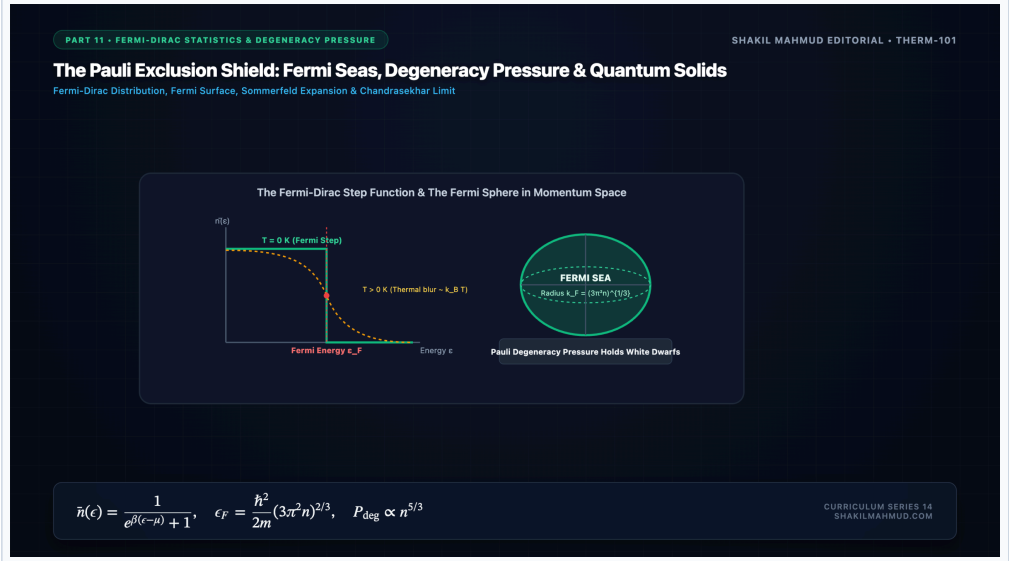
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "প্রতিসম অভিন্ন কণা — বোস-আইনস্টাইন পরিসংখ্যান ও কোয়ান্টাম ঘনীভবন"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১০। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-10-bose-einstein-statistics-condensation-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • একাদশ খণ্ড

পাউলির অপবর্জন ঢাল — ফার্মি-ডিরাক পরিসংখ্যান ও অবক্ষয়িত চাপ

পাউলির অপবর্জন ঢাল — ফার্মি-ডিরাক পরিসংখ্যান ও অবক্ষয়িত চাপ

578 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১১: *ফার্মি-ডিরাক ধাপ বণ্টন, তাপীয় বিচ্যুতির বিস্তার এবং ৩ডি ফার্মি গোলক যা অবক্ষয়িত চাপ সৃষ্টি করে।*

বোসনরা যদি কোয়ান্টাম জগতের সামাজিক অনুসারী হয় যারা সানন্দে একই একক ভূমিস্তরে ঘনীভূত হতে ভালোবাসে, তবে ফার্মিয়নরা হলো চরম ব্যক্তি-স্বাতন্ত্র্যবাদী কণা—যাদের কারণে এই মহাবিশ্বের কঠিন কাঠামো দাঁড়িয়ে আছে। ইলেকট্রন, প্রোটন, নিউট্রন ও কোয়ার্ক—দৃশ্যমান সমস্ত বস্তুর এই গাঠনিক উপাদানগুলোর স্পিন হলো অর্ধ-পূর্ণসংখ্যা ($S = ১/২, ৩/২, dots$)। ১৯২৫ সালে অস্ট্রিয়ান পদার্থবিদ উলফগ্যাং পাউলি তার ঐতিহাসিক অপবর্জন নীতি ঘোষণা করেন: একটি পরমাণুর কোনো দুটি ইলেকট্রন কখনোই একই কোয়ান্টাম অবস্থায় থাকতে পারে না। পরের বছর এনরিকো ফার্মি ও পল ডিরাক এই নীতিকে পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যায় প্রয়োগ করেন। এর ফলে উদ্ভাবিত সূত্রটি ব্যাখ্যা করে ধাতু কেন বিদ্যুৎ পরিবাহী, কঠিন পদার্থকে চেপে কেন সংকুচিত করা যায় না, এবং মৃত নক্ষত্রগুলো কোন শক্তিতে মহাকর্ষীয় পতন রোধ করে টিকে থাকে।

পাউলির অপবর্জন নীতি ও ফার্মি-ডিরাক পরিসংখ্যান

অর্ধ-পূর্ণসংখ্যা স্পিনের ফার্মিয়নদের যৌথ তরঙ্গ ফাংশন কণা স্থানান্তরের সাপেক্ষে সম্পূর্ণ **অপ্রতিসম (anti-symmetric)** হতে বাধ্য:

$$psi(dots, mathbf r_j, dots, mathbf r_k, dots) = -psi(dots, mathbf r_k, dots, mathbf r_j, dots)$$

যদি দুটি ফার্মিয়ন হুবহু একই কোয়ান্টাম স্তর দখল করতে চাইত, তবে $psi = -psiimpliespsiequiv0$ হতো—যা অসম্ভব। ফলে যেকোনো কোয়ান্টাম স্তরে কণা থাকার সংখ্যা কেবল বাইনারি হতে পারে:

$$n_k in 0, 1$$

গ্র্যান্ড ক্যানোনিকাল পার্টিশন ফাংশন থেকে এর ব্যবকলন করলে বেরিয়ে আসে বিখ্যাত **ফার্মি-ডিরাক বণ্টন সমীকরণ**:

bar{n}(epsilon) = frac{1}{e^{beta(epsilon – mu)} + 1}

ফার্মি সাগর ও পরম শূন্য তাপমাত্রা

পরম শূন্য তাপমাত্রায় ($Tto0$) ফার্মি-ডিরাক সমীকরণটি একটি নিখুঁত ধারালো ধাপ অপেক্ষকে (step function) রূপ নেয়:

lim_{T to 0} bar{n}(epsilon) = begin{cases} 1 & epsilon epsilon_F end{cases}

Shakil Mahmud • Research Monograph

ফার্মি শক্তি ($epsilon_F$) পর্যন্ত প্রতিটি কোয়ান্টাম স্তর ঠিক একটি করে ইলেকট্রন দ্বারা পূর্ণ থাকে, আর এর উপরের সমস্ত স্তর থাকে সম্পূর্ণ শূন্য। ভরবেগ স্পেসে এই পূর্ণ ভাণ্ডারকে বলা হয় **ফার্মি সাগর (Fermi Sea)**, যার সীমান্ত তলকে বলা হয় **ফার্মি পৃষ্ঠ (Fermi Surface)**:

$$epsilon_F = frachbar^2 2m(3pi^2 n)^{2/3}$$

সাধারণ ধাতুর ক্ষেত্রে ইলেকট্রনের ঘনত্ব এত বেশি যে তাদের ফার্মি তাপমাত্রা দাঁড়ায় $T_F = epsilon_F/k_B approx ৮০,০০০, textKelvin$! অর্থাৎ কক্ষ তাপমাত্রাতেও ধাতুর পরিবাহী ইলেকট্রনগুলো প্রায় পরম শূন্য তাপমাত্রার মতো চরম কোয়ান্টাম অবক্ষয়িত দশায় অবস্থান করে।

সোমারফেল্ড সম্প্রসারণ ও ইলেকট্রনিক তাপধারণ ক্ষমতা

ধাতুকে উত্তপ্ত করলে চিরায়ত পদার্থবিদ্যা ভবিষ্যদ্বাণী করেছিল যে প্রতিটি ইলেকট্রন $frac32k_BT$ তাপ শোষণ করবে, যার ফলে ধাতুর তাপধারণ ক্ষমতা হবে বিশাল। কিন্তু বাস্তবে তা ঘটে না। কোয়ান্টাম পরিসংখ্যান এর রহস্য উন্মোচন করে: ফার্মি সাগরের গভীরের ইলেকট্রনগুলো তাপ শোষণ করতে পারে না কারণ তাদের কাছাকাছি উপরের সমস্ত কোয়ান্টাম স্তর ইতোমধ্যে পূর্ণ! কেবলমাত্র ফার্মি পৃষ্ঠের সীমানায় থাকা ইলেকট্রনগুলোই সামান্য তাপীয় শক্তি গ্রহণ করতে পারে। আর্নল্ড সোমারফেল্ড প্রমাণ করেন যে ইলেকট্রনের আপেক্ষিক তাপ তাপমাত্রার সমানুপাতিক:

$$C_V^{textelec} proptoT$$

যা কক্ষ তাপমাত্রায় চিরায়ত অনুমানের চেয়ে প্রায় ৩০০ গুণ কম—এবং তা পরীক্ষালব্ধ ফলাফলের সাথে নিখুঁতভাবে মিলে যায়।

অবক্ষয়িত চাপ ও চন্দ্রশেখর সীমা

পরম শূন্য তাপমাত্রাতেও ফার্মিয়ন কণাগুলো স্থির হতে পারে না। পাউলির নীতি অনুযায়ী প্রতিটি স্তরে কেবল একটি কণা থাকতে পারায় উচ্চ শক্তির স্তরে যাওয়ার ফলে ইলেকট্রনগুলোর ভেতর প্রচণ্ড গতিবেগ তৈরি হয়। এই শূন্য-বিন্দু গতিশক্তি থেকে জন্ম নেয় এক ভয়ানক খাঁটি কোয়ান্টাম চাপ: **অবক্ষয়িত চাপ (Degeneracy Pressure)**:

$$P_{textdeg} propto n^{5/3}$$

আমাদের সূর্যের মতো নক্ষত্রগুলো যখন জ্বালানি পুড়িয়ে শেষ করে ফেলে, তখন তাদের মহাকর্ষীয় পতনকে এই ইলেকট্রন অবক্ষয়িত চাপই রুখে দেয় এবং নক্ষত্রটি **শ্বেত বামন (White Dwarf)** হিসেবে কোটি কোটি বছর টিকে থাকে।

১৯৩০ সালে মাত্র উনিশ বছর বয়সে ভারতীয় জ্যোতির্বিদ সুব্রহ্মণ্যম চন্দ্রশেখর আবিষ্কার করেন যে নক্ষত্রটির ঘনত্ব আরও বাড়লে ইলেকট্রনগুলো আলোর গতিতে ছুটতে শুরু করে, যার ফলে চাপ কমে $P propto n^{4/3}$-এ নেমে আসে। ফলে নক্ষত্রের ভর যদি সূর্যের ভরের ১.৪৪ গুণের বেশি হয় (**চন্দ্রশেখর সীমা**), তবে ইলেকট্রন অবক্ষয়িত চাপ মহাকর্ষকে আর ধরে রাখতে পারে না। নক্ষত্রটি আরও সংকুচিত হয়ে নিউট্রন নক্ষত্রে কিংবা ব্ল্যাক হোলে পরিণত হয়। পাউলির অপবর্জন নীতিই মূলত সমগ্র মহাবিশ্বের পদার্থের দৃশ্যমান অস্তিত্বের রক্ষাকবচ।

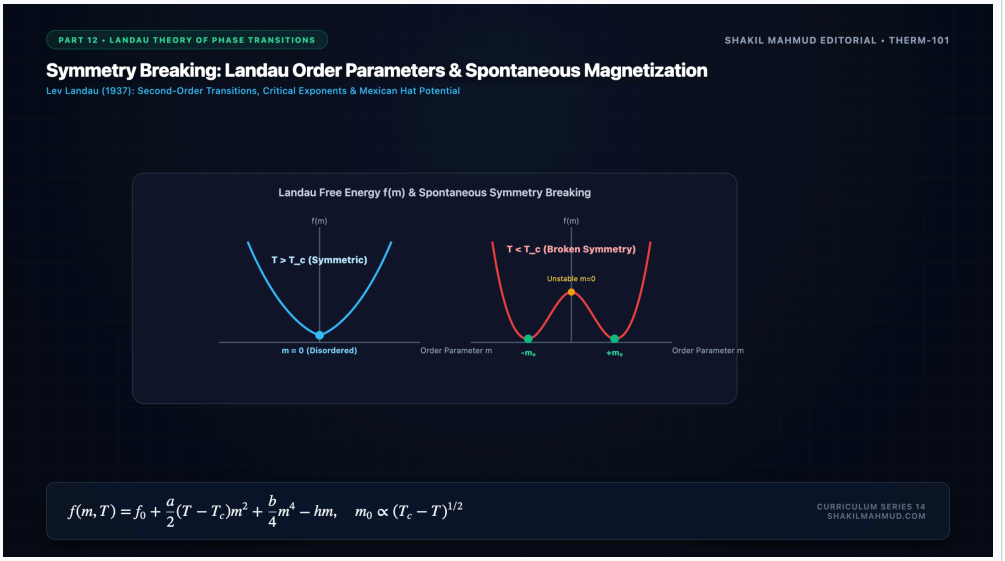
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "পাউলির অপবর্জন ঢাল — ফার্মি-ডিরাক পরিসংখ্যান ও অবক্ষয়িত চাপ"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১১। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-11-fermi-dirac-statistics-degeneracy-pressure-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দ্বাদশ খণ্ড

প্রতিসাম্য ভঙ্গ — দশা রূপান্তর, সন্ধি ঘটনা ও ল্যান্ডউ গড় ক্ষেত্র তত্ত্ব

প্রতিসাম্য ভঙ্গ — দশা রূপান্তর, সন্ধি ঘটনা ও ল্যান্ডউ গড় ক্ষেত্র তত্ত্ব

608 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১২: *ল্যান্ডউ মুক্ত শক্তি অপেক্ষক $f(m)$, উচ্চ তাপমাত্রার প্রতিসম একক নিম্নবিন্দু থেকে নিম্ন তাপমাত্রায় স্বতঃস্ফূর্ত প্রতিসাম্য ভঙ্গের রূপান্তর।*

পানি ফুটে বাষ্পে পরিণত হওয়া, গলিত লোহা ঠান্ডা হয়ে চুম্বকে রূপ নেওয়া, কিংবা সিরামিক অক্সাইড সম্পূর্ণ বৈদ্যুতিক রোধ হারিয়ে অতিপরিবাহী (superconductor)-তে পরিণত হওয়া—পদার্থের এই আকস্মিক ও নাটকীয় রূপান্তরকে বলা হয় দশা রূপান্তর (Phase Transition)। আণুবীক্ষণিক পদার্থবিজ্ঞানের দৃষ্টিতে এটি এক পরম গাণিতিক ধাঁধা: পরমাণুর হ্যামিল্টোনিয়ান সম্পূর্ণ মসৃণ ও ব্যবকলনযোগ্য, অথচ দৃশ্যমান জগতে দশা রূপান্তরের মুহূর্তে ভৌত রাশিগুলো হঠাৎ অসীমের দিকে ধাবিত হয় বা আকস্মিক লাফের সৃষ্টি করে। ১৯৩৭ সালে সোভিয়েত তাত্ত্বিক পদার্থবিদ লেভ দাভিদোভিচ ল্যান্ডউ প্রতিসাম্যের জ্যামিতিক ধারণার ওপর ভিত্তি করে সন্ধি ঘটনা ব্যাখ্যার এক যুগান্তকারী সাধারণ তত্ত্ব প্রতিষ্ঠা করেন: **ল্যান্ডউ গড় ক্ষেত্র তত্ত্ব (Landau Mean Field Theory)**।

এরেনফেস্টের দশা রূপান্তর শ্রেণিবিন্যাস

চিরায়ত তাপগতিবিদ্যায় পল এরেনফেস্ট মুক্ত শক্তির ব্যবকলনের ভিত্তিতে দশা রূপান্তরকে দুই ভাগে বিভক্ত করেন:

- **প্রথম-মাত্রার রূপান্তর:** গিবস মুক্ত শক্তির প্রথম মাত্রার ব্যবকলন—এন্ট্রপি $S = -(partial G/partial T)_P$ এবং আয়তন $V = (partial G/partial P)_T$-তে আকস্মিক লাফের সৃষ্টি হয়। ফলে এতে সুপ্ততাপ ($L = T Delta S$) ও ঘনত্বের পরিবর্তন ঘটে। বরফ গলে পানি হওয়া বা পানি ফুটে বাষ্প হওয়া প্রথম মাত্রার রূপান্তর।
- **ধারাবাহিক (দ্বিতীয়-মাত্রার) রূপান্তর:** প্রথম ব্যবকলনে কোনো লাফ থাকে না (কোনো সুপ্ততাপ নেই, $Delta S = 0$), কিন্তু দ্বিতীয় মাত্রার ব্যবকলন—তাপধারণ ক্ষমতা $C_P = -T(partial^2 G/partial T^2)_P$ বা চৌম্বক গ্রাহিতা chi সন্ধিবিন্দুতে অসীমে পৌঁছায়। লোহার কুরি বিন্দুতে চুম্বকায়ন দ্বিতীয় মাত্রার রূপান্তর।

অর্ডার প্যারামিটার ও স্বতঃস্ফূর্ত প্রতিসাম্য ভঙ্গ

ল্যান্ডউ উপলব্ধি করেন যে ধারাবাহিক দশা রূপান্তর কেবল তাপগতীয় ব্যবকলন নয়; এটি ব্যবস্থার মৌলিক **প্রতিসাম্যের (Symmetry)** রূপান্তরকে নির্দেশ করে। সন্ধি তাপমাত্রা T_c-এর উপরে একটি চুম্বক সম্পূর্ণ বিশৃঙ্খল: অণুগুলোর স্পিন সবদিকে এলোমেলোভাবে থাকায় ব্যবস্থাটি স্থানিক ঘূর্ণন প্রতিসাম্য বজায় রাখে। কিন্তু T_c-এর নিচে স্পিনগুলো হঠাৎ একটি নির্দিষ্ট দিকে সারিবদ্ধ হয়ে স্বতঃস্ফূর্তভাবে সেই ঘূর্ণন প্রতিসাম্য ভেঙে ফেলে।

এই প্রতিসাম্য ভঙ্গের মাত্রা পরিমাপ করতে ল্যান্ডউ প্রবর্তন করেন **অর্ডার প্যারামিটার (m)**: যা উচ্চ তাপমাত্রায় নিখুঁত শূন্য থাকে এবং নিম্ন তাপমাত্রায় অশূন্য মান ধারণ করে:

m = begin{cases} 0 & T > T_c \ pm m_0(T) ne 0 & T < T_c end{cases}

ল্যান্ডউ মুক্ত শক্তি সম্প্রসারণ

সন্ধিবিন্দুর কাছাকাছি অর্ডার প্যারামিটারের মান খুব ক্ষুদ্র ($mll1$)। বাহ্যিক ক্ষেত্র না থাকলে স্থানিক উল্টানোর প্রতিসাম্যের কারণে ($mto -m$) মুক্ত শক্তিতে m-এর বিজোড় ঘাতগুলো শূন্য হয়ে যায়:

Shakil Mahmud • Research Monograph

f(m, T) = f_0(T) + frac{a(T)}{2} m^2 + frac{b}{4} m^4 – h m

ব্যবস্থার স্থায়িত্বের জন্য b > 0 হতে হয়, এবং দ্বিঘাত সহগ $a(T)$ সন্ধিবিন্দু পার হওয়ার সময় চিহ্ন পরিবর্তন করে: a(T) = a_0(T – T_c)। এই বিভব অপেক্ষকটির জ্যামিতিক রূপ বিশ্লেষণ করলে দেখা যায়:

- **T > T_c (a > 0):** অপেক্ষকটি একটি একক উত্তল প্যারাবোলা, যার সর্বনিম্ন বিন্দু $m^* = 0$। ফলে বিশৃঙ্খল প্রতিসম দশা স্থায়ী হয়।
- **T < T_c (a < 0):** $m = 0$ বিন্দুটি একটি অস্থির চূড়ায় পরিণত হয় এবং দুই পাশে দুটি নতুন গভীর উপত্যকা তৈরি হয় (ডাবল-ওয়েল বা মেক্সিকান হ্যাট বিভব):

m_0(T) = pm sqrt{frac{a_0}{b}} (T_c – T)^{1/2}

> ব্যবস্থাটিকে যেকোনো একটি উপত্যকা বেছে নিতে হয়, যার মাধ্যমে স্বতঃস্ফূর্তভাবে pmm প্রতিসাম্য ভেঙে পড়ে!

সর্বজনীন ক্রিটিক্যাল সূচক (Critical Exponents)

ল্যান্ডউ তত্ত্ব প্রমাণ করে যে সন্ধিবিন্দুর কাছাকাছি বিভিন্ন ভৌত রাশি সর্বজনীন ঘাত নিয়ম মেনে চলে:

1. **অর্ডার প্যারামিটার সূচক ($beta$):** m_0 propto (T_c – T)^{1/2} implies beta = 1/2।
2. **গ্রাহিতা সূচক ($gamma$):** chi = (partial m / partial h) propto |T – T_c|^{-1} implies gamma = 1।
3. **তাপধারণ ক্ষমতার ব্যবধান ($alpha$):** সন্ধিবিন্দুতে আপেক্ষিক তাপে একটি নির্দিষ্ট লাফ দেখা যায়: $alpha = 0$।

গিনজবার্গ মানদণ্ড ও তত্ত্বের সীমাবদ্ধতা

ল্যান্ডউ তত্ত্ব ধরে নিয়েছিল যে অর্ডার প্যারামিটার সর্বত্র স্থানিকভাবে সমসত্ত্ব—অর্থাৎ এটি স্থানীয় পরিসংখ্যানিক ওঠানামাকে উপেক্ষা করেছিল। ভিতালি গিনজবার্গ প্রমাণ করেন যে স্থানীয় ওঠানামা তখনই অগ্রাহ্য করা যায় যখন স্থানিক মাত্রা চার বা তার বেশি হয় (d > 4)। আমাদের বাস্তব ৩-মাত্রিক জগতে সন্ধিবিন্দুতে স্থানীয় ওঠানামা এত প্রবল হয় যে ল্যান্ডউয়ের সরল সূচকগুলো ($beta = 1/2$) ভুল প্রমাণিত হয়। ত্রিমাত্রিক জগতের এই গভীর সত্য উন্মোচন করতে পরবর্তীতে আবিষ্কৃত হয় রিনরমালাইজেশন গ্রুপ তত্ত্ব।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "প্রতিসাম্য ভঙ্গ — দশা রূপান্তর, সন্ধি ঘটনা ও ল্যান্ডউ গড় ক্ষেত্র তত্ত্ব"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১২। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-12-phase-transitions-landau-mean-field-theory-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ত্রয়োদশ খণ্ড

ল্যাটিস চুম্বকত্ব — ২ডি আইসিং মডেল ও লার্স ওনসাগারের নিখুঁত সমাধান

ল্যাটিস চুম্বকত্ব — ২ডি আইসিং মডেল ও লার্স ওনসাগারের নিখুঁত সমাধান

560 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৩: *২ডি বর্গাকার আইসিং ল্যাটিসে স্পিন ক্লাস্টার ডোমেইন এবং সন্ধি তাপমাত্রায় ওনসাগারের নিখুঁত স্বতঃস্ফূর্ত চুম্বকায়নের শূন্যে পতন।*

১৯২০ সালে জার্মান পদার্থবিদ উইলহেম লেঞ্জ তার ডক্টরেট ছাত্র আর্নস্ট আইসিংকে একটি গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে দেন: চুম্বকীয় পরমাণুগুলোর মধ্যকার মিথস্ক্রিয়া কি স্বতঃস্ফূর্ত চুম্বকত্ব ব্যাখ্যা করতে পারে? ১৯২৫ সালে আইসিং এক-মাত্রিক ল্যাটিসে এই মডেলটি নিখুঁতভাবে সমাধান করেন এবং হতাশ হয়ে দেখতে পান যে পরম শূন্য তাপমাত্রার উপরে কোনো তাপমাত্রাতেই এতে কোনো দশা রূপান্তর ঘটে না ($T_c = 0$)। আইসিং ভুলভাবে সিদ্ধান্তে আসেন যে এই মডেল কখনোই কোনো মাত্রাতেই চুম্বকত্ব প্রদর্শন করবে না। প্রায় দুই দশক ধরে বিজ্ঞানীদের মনে সংশয় তৈরি হয়েছিল যে পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা হয়তো কখনোই বাস্তব দশা রূপান্তর ব্যাখ্যা করতে সক্ষম নয়। কিন্তু ১৯৪৪ সালে নরওয়েজীয়-আমেরিকান রসায়নবিদ লার্স ওনসাগার দ্বি-মাত্রিক আইসিং মডেলের এক অবিশ্বাস্য নিখুঁত গাণিতিক সমাধান প্রকাশ করে বিশ্বকে স্তব্ধ করে দেন।

আইসিং মডেলের হ্যামিল্টোনিয়ান ও ১ডি ব্যর্থতা

আইসিং মডেলে একটি ল্যাটিসের প্রতিটি বিন্দুতে একটি বাইনারি স্পিন চলক $s_i in +1, -1$ ধরা হয়, যা ঊর্ধ্বমুখী বা নিম্নমুখী চৌম্বক দ্বিমেরু নির্দেশ করে। পাশাপাশি দুটি স্পিনের আকর্ষণ বল J > 0 এবং বাহ্যিক চৌম্বক ক্ষেত্র h হলে হ্যামিল্টোনিয়ান দাঁড়ায়:

H(mathbf{s}) = -J sum_{langle i, j rangle} s_i s_j – h sum_{i=1}^N s_i

এক মাত্রায় $2 times 2$ **ট্রান্সফার ম্যাট্রিক্স (Transfer Matrix)** পদ্ধতির সাহায্যে পার্টিশন ফাংশন সম্পূর্ণ বিশ্লেষণাত্মকভাবে সমাধান করা যায়: $Z_{1D} = lambda_+^N + lambda_-^N$। যেহেতু আইগেনমান $lambda_+$ সকল ধনাত্মক তাপমাত্রায় সম্পূর্ণ মসৃণ ও অশূন্য, তাই কোনো গাণিতিক সিঙ্গুলারিটি তৈরি হওয়া সম্ভব নয়। রুডলফ পিয়ার্লস পরবর্তীতে এর ভৌত কারণ ব্যাখ্যা করেন: এক মাত্রায় স্পিনের বিন্যাস ভাঙতে নির্দিষ্ট শক্তি $DeltaE = 2J$ লাগলেও এন্ট্রপি বাড়ে $DeltaS = k_B ln N$ হারে। কণা সংখ্যা $N to infty$ হলে মুক্ত শক্তি Delta F = 2J – k_B T ln N < 0 হয়ে যায়, ফলে সামান্য তাপীয় কম্পনেই এক-মাত্রিক চৌম্বক শৃঙ্খল ভেঙে ধূলিসাৎ হয়ে যায়।

পিয়ার্লস যুক্তি ও ক্রামার্স-ওয়ানিয়ার দ্বৈততা

১৯৩৬ সালে পিয়ার্লস প্রমাণ করেন যে দ্বি-মাত্রায় নিম্ন তাপমাত্রায় দীর্ঘস্থায়ী চুম্বকত্ব অক্ষুণ্ণ থাকে। বিপরীত স্পিনের অঞ্চলকে আলাদা করতে যে সীমানা তৈরি হয় তার পরিধি L হলে শক্তির ব্যয় হয় $DeltaE = 2JL$। যেহেতু L দৈর্ঘ্যের আবদ্ধ লুপ তৈরির উপায়ের সংখ্যা c^L হারে বাড়ে, তাই নিম্ন তাপমাত্রায় মুক্ত শক্তির পরিবর্তন ধনাত্মক থাকে (Delta F > 0), যা স্বতঃস্ফূর্ত চুম্বকত্বকে রক্ষা করে।

১৯৪১ সালে হেন্ড্রিক ক্রামার্স এবং গ্রেগরি ওয়ানিয়ার আবিষ্কার করেন **ক্রামার্স-ওয়ানিয়ার দ্বৈততা (Kramers-Wannier Duality)**। তারা দেখান যে উচ্চ তাপমাত্রার দ্বি-মাত্রিক বর্গাকার ল্যাটিস হুবহু নিম্ন তাপমাত্রার দ্বৈত ল্যাটিসের সমান। এই প্রতিসাম্য থেকে তারা কোনো সমীকরণ সমাধান না করেই নিখুঁত সন্ধি তাপমাত্রার মান গণনা করেন:

$$sinh left(frac 2 J k_B T_c right) = 1 implies frac k_B T_c J = frac 2 ln(1 + sqrt 2) approx ২.২৬৯১৮৫$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

ওনসাগারের নিখুঁত সমাধান (১৯৪৪)

বিংশ শতাব্দীর গাণিতিক পদার্থবিজ্ঞানের অন্যতম সেরা কীর্তি স্থাপন করে লার্স ওনসাগার শূন্য বাহ্যিক ক্ষেত্রে অসীম ল্যাটিসের জন্য ট্রান্সফার ম্যাট্রিক্সকে ক্লিফোর্ড অ্যালজেব্রার মাধ্যমে রূপান্তর করে পার্টিশন ফাংশনের নিখুঁত রূপ প্রতিপাদন করেন:

-beta f = ln(2 cosh 2K) + frac{1}{2pi} int_{0}^{pi} lnleft[frac{1}{2}left(1 + sqrt{1 – kappa^2 sin^2 theta} right) right] dtheta

যেখানে সন্ধি তাপমাত্রায় $kappa = 1$ হলে উপবৃত্তীয় সমাকলনে নিখুঁত সিঙ্গুলারিটি তৈরি হয়। ওনসাগার প্রমাণ করেন যে সন্ধিবিন্দুতে আপেক্ষিক তাপ **লগারিদমিক হারে অসীমে ধাবিত হয়**:

C_V sim – frac{2 k_B}{pi} left(frac{2J}{k_B T_c}right)^2 ln|T – T_c|

১৯৫২ সালে সি. এন. ইয়াং সন্ধি তাপমাত্রার নিচে স্বতঃস্ফূর্ত চুম্বকায়নের সঠিক রূপ বের করেন:

M(T) = left[1 – sinh^{-4}left(frac{2J}{k_B T}right) right]^{1/8} propto (T_c – T)^{1/8}

এখানে ক্রিটিক্যাল সূচক $beta = ১/৮ = ০.১২৫$—যা ল্যান্ডউয়ের অনুমানের ($beta = ১/২ = ০.৫$) চেয়ে সম্পূর্ণ আলাদা। ওনসাগারের এই সমাধান অকাট্যভাবে প্রমাণ করেছিল যে চরম ওঠানামার মুহূর্তে চিরায়ত গড় ক্ষেত্র তত্ত্ব ভেঙে পড়ে এবং মসৃণ অণুর নিয়ম থেকেই প্রকৃতিতে পরম ম্যাক্রোস্কোপিক রূপান্তরের জন্ম হয়।

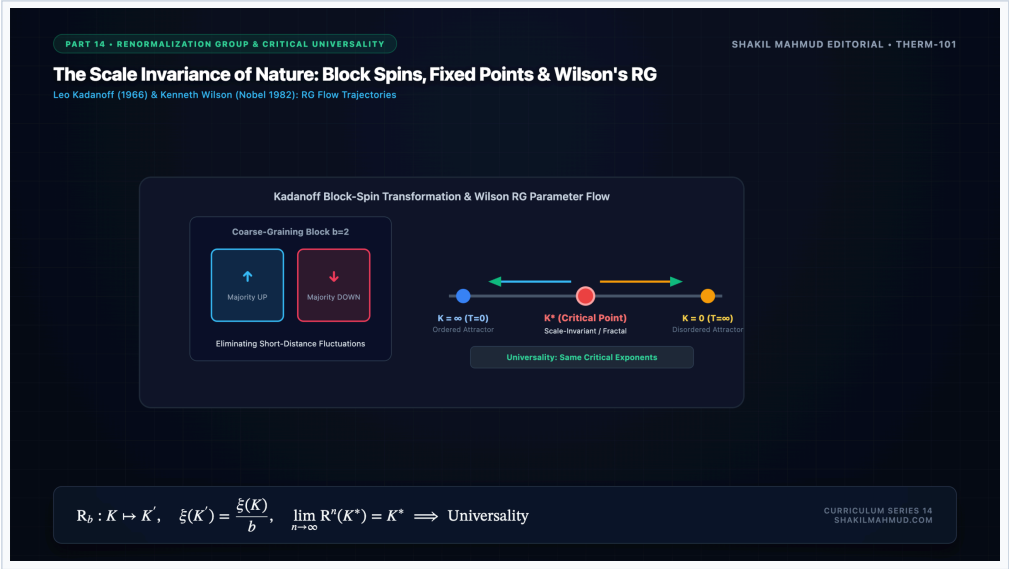
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ল্যাটিস চুম্বকত্ব — ২ডি আইসিং মডেল ও লার্স ওনসাগারের নিখুঁত সমাধান"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১৩। https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-13-2d-ising-model-onsager-exact-solution-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • চতুর্দশ খণ্ড

প্রকৃতির স্কেল অবিচলতা — ব্লক-স্পিন, রিনরমালাইজেশন গ্রুপ ও উইলসনের ফিক্সড পয়েন্ট

প্রকৃতির স্কেল অবিচলতা — ব্লক-স্পিন, রিনরমালাইজেশন গ্রুপ ও উইলসনের ফিক্সড পয়েন্ট

530 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৪: *কাদানফ ব্লক-স্পিন রূপান্তর এবং ক্রিটিক্যাল ফিক্সড-পয়েন্টের চারপাশে কেনেথ উইলসনের রিনরমালাইজেশন গ্রুপ প্রবাহ চিত্র।*

১৯৬০-এর দশকে তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞান স্কেল বা মাত্রার এক গভীর সংকটের মুখোমুখি হয়েছিল। যেকোনো ধারাবাহিক দশা রূপান্তরের সন্ধিক্ষণে—ফুটন্ত তরলে, চৌম্বক রূপান্তরে বা ধাতব মিশ্রণে—কোরিলেশন দৈর্ঘ্য অসীমের দিকে ধাবিত হয় ($xitoinfty$)। এই সন্ধিমুহূর্তে পরমাণুর অতি-ক্ষুদ্র আণুবীক্ষণিক কম্পন ($১০^{-১০}$ মিটার) ম্যাক্রোস্কোপিক সেন্টিমিটার স্কেলের বিশাল তরঙ্গের সাথে একীভূত হয়ে যায়। ফলে প্রচলিত গাণিতিক তত্ত্বগুলো সম্পূর্ণ অচল হয়ে পড়ে। কিন্তু বিজ্ঞানীদের সবচেয়ে বেশি অবাক করেছিল যে সম্পূর্ণ ভিন্ন আণবিক গঠনের দুটি ব্যবস্থা—যেমন কার্বন ডাই অক্সাইড তরল এবং কঠিন লোহার স্ফটিক—সন্ধিবিন্দুতে হুবহু একই পরম সূচক (critical exponents) প্রদর্শন করে কেন? ১৯৭১ সালে আমেরিকান পদার্থবিদ কেনেথ উইলসন **রিনরমালাইজেশন গ্রুপ (Renormalization Group বা RG)** তত্ত্বের মাধ্যমে এই রহস্যের সমাধান করেন—যা পদার্থবিজ্ঞানের ইতিহাসকে চিরতরে বদলে দিয়েছিল।

কাদানফের ব্লক-স্পিন ধারণা

১৯৬৬ সালে লিও কাদানফ একটি স্বজ্ঞাত গাণিতিক পদ্ধতির প্রস্তাব করেন। একটি বর্গাকার ল্যাটিসে পাশাপাশি স্পিনগুলোকে $btimesb$ আকারের ব্লকে বিভক্ত করা যাক। প্রতিটি ব্লকের অধিকাংশ স্পিন যেদিকে মুখ করে আছে, সেই অনুযায়ী ব্লকটির জন্য একটি নতুন কার্যকরী স্পিন s’_I = pm 1 নির্ধারণ করা হয়:

$$s’_I = operatorname{sign}left(sum_{i in text{Block } I} s_i right)$$

ক্ষুদ্র দূরত্বের জটিল ওঠানামাগুলোকে সমষ্টিগতভাবে বিলীন করে দিয়ে এই ব্যবস্থাটিকে একটি নতুন কার্যকর মিথস্ক্রিয়া ধ্রুবক K’-এ রূপান্তরিত করা যায়:

$$K’ = mathcal{R}_b(K)$$

যেহেতু দূরত্বকে b গুণ সংকুচিত করা হয়েছে, তাই কোরিলেশন দৈর্ঘ্য রূপান্তর হবে xi(K’) = xi(K) / b সূত্র অনুযায়ী। সন্ধি তাপমাত্রায় কোরিলেশন দৈর্ঘ্য অসীম ($xi = infty$)। অসীমকে b দিয়ে ভাগ করলেও অসীমই থাকে। ফলে সন্ধিবিন্দুটি মূলত রিনরমালাইজেশন গ্রুপের একটি **ফিক্সড পয়েন্ট (Fixed Point)**:

$$K^* = mathcal{R}_b(K^*)$$

হ্যামিল্টোনিয়ান স্পেসে উইলসনের গতিশীল প্রবাহ

কেনেথ উইলসন কাদানফের এই ধারণাকে এক পরাক্রমশালী গাণিতিক তত্ত্বে উন্নীত করেন। একটি মাত্র ধ্রুবকের বদলে উইলসন সমস্ত সম্ভাব্য হ্যামিল্টোনিয়ানের এক অসীম-মাত্রিক স্থানে আরজি প্রবাহ বিবেচনা করেন। ফিক্সড পয়েন্ট $mathcal{H}^*$-এর কাছাকাছি এই প্রবাহের আইগেনমানগুলো (b^{y_i}) মহাবিশ্বের সমস্ত মিথস্ক্রিয়াকে তিনটি মৌলিক শ্রেণিতে বিভক্ত করে:

1. **প্রাসঙ্গিক অপারেটর (Relevant Operators, y_i > 0):** স্কেল বড় করার সাথে সাথে এদের প্রভাব দ্রুত বৃদ্ধি পায়। এরা ব্যবস্থাকে ফিক্সড পয়েন্ট থেকে দূরে ঠেলে দেয়। একটি চুম্বকের জন্য তাপমাত্রা t = (T – T_c)/T_c এবং বাহ্যিক চৌম্বক ক্ষেত্র h হলো একমাত্র দুটি প্রাসঙ্গিক চলক।

Shakil Mahmud • Research Monograph

2. **অপ্রাসঙ্গিক অপারেটর (Irrelevant Operators, y_i < 0):** স্কেল বড় হওয়ার সাথে সাথে এদের প্রভাব ক্ষয়ে ক্ষয়ে শূন্যে মিলিয়ে যায়। পরমাণুর নিখুঁত আকৃতি, ল্যাটিসের সূক্ষ্ম ত্রুটি এবং জটিল রাসায়নিক বন্ধনের সমস্ত খুঁটিনাটি তথ্য আরজি প্রবাহ মুছে ফেলে দেয়!
3. **প্রান্তিক অপারেটর (Marginal Operators, $y_i = 0$):** প্রথম মাত্রায় এদের মান অপরিবর্তিত থাকে।

সর্বজনীনতার (Universality) গাণিতিক অলৌকিকত্ব

উইলসনের এই প্রবাহ চিত্র থেকেই ব্যাখ্যা পাওয়া যায় **সর্বজনীনতার (Universality)**। যেহেতু অপ্রাসঙ্গিক অপারেটরগুলো দূরত্বের সাথে শূন্যে বিলীন হয়ে যায়, তাই কোটি কোটি ভিন্ন ভিন্ন আণুবীক্ষণিক ব্যবস্থা শেষ পর্যন্ত হুবহু *একই* ফিক্সড পয়েন্টের মহাকর্ষীয় বলয়ে পতিত হয়।

এর ফলে মুক্ত শক্তির সূত্রটি এমন একটি সম্পর্কে রূপ নেয় যেখানে সমস্ত ক্রিটিক্যাল সূচক কেবল দুটি বিষয়ের ওপর নির্ভর করে: স্থানিক মাত্রা d এবং অর্ডার প্যারামিটারের প্রতিসাম্য n:

$$alpha = 2 – frac{d}{y_t}, quad beta = frac{d – y_h}{y_t}, quad gamma = frac{2 y_h – d}{y_t}$$

সন্ধিবিন্দুতে থাকা তরল গ্যাস হোক কিংবা কঠিন লোহার চুম্বক—উভয়ের স্থানিক মাত্রা ৩ ($d = 3$) এবং অর্ডার প্যারামিটার একমাত্রিক স্কেলার ($n = 1$)। তাই প্রকৃতি তাদের বাধ্য করে হুবহু একই ক্রিটিক্যাল সূচক ($beta approx ০.৩২৬, gamma approx ১.২৩৭$) প্রদর্শন করতে। এই অবিস্মরণীয় অবদানের জন্য ১৯৮২ সালে কেনেথ উইলসন নোবেল পুরস্কারে ভূষিত হন। প্রকৃতি প্রমাণ করেছিল যে সন্ধিক্ষণে সে তার আণুবীক্ষণিক জটিলতা ঝেড়ে ফেলে এক নিখুঁত স্কেল-অবিচল ফ্র্যাক্টালে পরিণত হয়।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "প্রকৃতির স্কেল অবিচলতা — ব্লক-স্পিন, রিনরমালাইজেশন গ্রুপ ও উইলসনের ফিক্সড পয়েন্ট"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১৪।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-14-renormalization-group-wilson-fixed-points-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • পঞ্চদশ খণ্ড

দ্বৈপায়ন গতি ও সান্দ্রীয় বাধা — ব্রাউনীয় গতি, ল্যাঞ্জেভিন বলবিদ্যা ও ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন

দ্বৈপায়ন গতি ও সান্দ্রীয় বাধা — ব্রাউনীয় গতি, ল্যাঞ্জেভিন বলবিদ্যা ও ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন

490 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ

❖



চিত্র ১৫: *ব্রাউনীয় এলোমেলো গতিপথ এবং সান্দ্রীয় বাধা ও তাপীয় বিশৃঙ্খলার মাঝে ভারসাম্য সৃষ্টিকারী আইনস্টাইন ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন সমীকরণ।*

১৮২৭ সালে স্কটিশ উদ্ভিদবিজ্ঞানী রবার্ট ব্রাউন পানিতে ভাসমান *Clarkia pulchella* উদ্ভিদের পরাগরেণু অণুবীক্ষণ যন্ত্র দিয়ে পর্যবেক্ষণ করছিলেন। তিনি স্তম্ভিত হয়ে লক্ষ্য করলেন যে পানির ভেতর পরাগরেণু থেকে নির্গত অতিক্ষুদ্র কণাগুলো অবিরাম ও সম্পূর্ণ এলোমেলোভাবে জিগজ্যাগ গতিতে ছুটে বেড়াচ্ছে। ব্রাউন নিশ্চিত করেছিলেন যে এই কণাগুলো কোনো জীবিত সত্ত্বা নয়; কিন্তু প্রায় আট দশক ধরে এই নিরন্তর গতির কোনো ভৌত ব্যাখ্যা পাওয়া যায়নি। ১৯০৫ সালে তার বিখ্যাত 'অলৌকিক বর্ষে' আলবার্ট আইনস্টাইন উপলব্ধি করেন যে ব্রাউনীয় গতিই হলো পরমাণুর অস্তিত্বের সবচেয়ে অকাট্য প্রত্যক্ষ প্রমাণ। পরবর্তীতে পল ল্যাঞ্জেভিনের সাথে যৌথ তত্ত্বে প্রতিষ্ঠিত হয় আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানের এক অমর স্তম্ভ: **ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন উপপাদ্য (Fluctuation-Dissipation Theorem)**।

আইনস্টাইনের এলোমেলো গতিপথ ও বিচ্ছুরণ সমীকরণ

আইনস্টাইন ব্রাউনীয় গতিকে বিচ্ছুরণ বা ডিফিউশনের দৃষ্টি থেকে বিশ্লেষণ করেন। tau সময় ব্যবধানে প্রতিটি কণা এলোমেলোভাবে $Delta$ দূরত্ব অতিক্রম করে। সম্ভাবনা ঘনত্ব $rho(x,t)$-কে টেইলর ধারায় বিস্তৃত করে আইনস্টাইন ক্লাসিক্যাল ডিফিউশন সমীকরণ প্রতিপাদন করেন:

$$fracpartialrhopartialt = Dfracpartial^2rhopartialx^2, quad D = fraclangleDelta^2rangle2tau$$

চিরায়ত বলবিদ্যায় সরণ সময়ের সমানুপাতিক ($xproptot$) হলেও এলোমেলো সংঘর্ষের কারণে ব্রাউনীয় কণার **গড় বর্গ সরণ (Mean Square Displacement)** সময়ের সাথে রৈখিকভাবে বৃদ্ধি পায়:

$$langlex^2(t)rangle = 2Dt$$

আইনস্টাইন সম্পর্ক: সান্দ্র বাধা ও তাপীয় কোলাহলের মিলন

ডিফিউশন সহগ D-কে আণবিক গতির সাথে যুক্ত করতে আইনস্টাইন অভিকর্ষীয় ক্ষেত্রে কণার সাম্যাবস্থা বিবেচনা করেন। সান্দ্রতার কারণে কণার নিচের দিকের গতিবেগ $v = F/gamma$ (যেখানে $gamma = 6pietar$ হলো স্টোকসের সান্দ্রতা সহগ)। সাম্যাবস্থায় নিচের দিকে কণার পতন এবং ওপরের দিকে তাপীয় ডিফিউশন পরস্পরকে ভারসাম্য প্রদান করে। বোল্টজম্যানের ব্যারোমেট্রিক সমীকরণের সাথে এর তুলনা করে আইনস্টাইন তার ঐতিহাসিক সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠা করেন:

$$D = frack_BTgamma = fracRTN_A(6pietar)$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

এখানে N_A হলো অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা। ১৯০৮ সালে ফরাসি বিজ্ঞানী জঁ পেরা এই সমীকরণ ব্যবহার করে অণুবীক্ষণ যন্ত্রের নিচে কণার গতি মেপে নির্ভুলভাবে অ্যাভোগাড্রো সংখ্যা ($N_A approx ৬.৮ times ১০^{২৩}$) নির্ণয় করেন এবং ১৯২৬ সালে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন। পরমাণুর বাস্তব অস্তিত্ব বিজ্ঞানজগতে চিরতরে প্রতিষ্ঠিত হয়।

ল্যাঞ্জেভিন বলবিদ্যা ও স্টোকাস্টিক সমীকরণ

১৯০৮ সালে পল ল্যাঞ্জেভিন নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রকে ব্রাউনীয় কণার ওপর প্রয়োগ করে স্টোকাস্টিক সমীকরণের জন্ম দেন। তিনি কণার ওপর প্রযুক্ত পরিবেশগত বলকে দুটি ভাগে ভাগ করেন:

$$m frac{dv}{dt} = -gamma m v + xi(t)$$

1. **সান্দ্রীয় বাধা ($-gamma m v$):** এটি একটি নির্দিষ্ট প্রতিরোধক বল যা কণার গতিকে ধীর করে দেয় এবং গতিশক্তিকে তাপে রূপান্তর করে।
2. **র‍্যান্ডম বল ($xi(t)$):** চারপাশের কোটি কোটি পানির অণুর অবিরাম, আকস্মিক ও এলোমেলো ধাক্কার সমষ্টি, যার গড় মান শূন্য ($langle xi(t) rangle = ০$)।

শক্তির সমবণ্টন নীতি ($frac{১}{২} m langle v^2 rangle = frac{১}{২} k_B T$) প্রয়োগ করে ল্যাঞ্জেভিন প্রমাণ করেন যে র‍্যান্ডম বলের তীব্রতা সরাসরি সান্দ্র বাধার সমানুপাতিক:

langle xi(t) xi(t’) rangle = 2 gamma k_B T , delta(t – t’)

ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন উপপাদ্য

এই সমীকরণটিই হলো বিশ্বখ্যাত **ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন উপপাদ্যের** আদি রূপ। সান্দ্র সহগ $gamma$ নির্দেশ করে শক্তির অপচয় (dissipation), আর $xi(t)$ নির্দেশ করে তাপীয় ওঠানামা (fluctuations)। এই উপপাদ্য প্রমাণ করে যে এই দুটি ভিন্ন কোনো ঘটনা নয়: অপচয় ছাড়া ওঠানামা সম্ভব নয়, এবং ওঠানামা ছাড়া অপচয় অসম্ভব। তাপীয় জগতের সান্দ্রীয় বাধা এবং এলোমেলো কোলাহল মূলত একই আণবিক সত্যের দুটি অবিচ্ছেদ্য পিঠ।

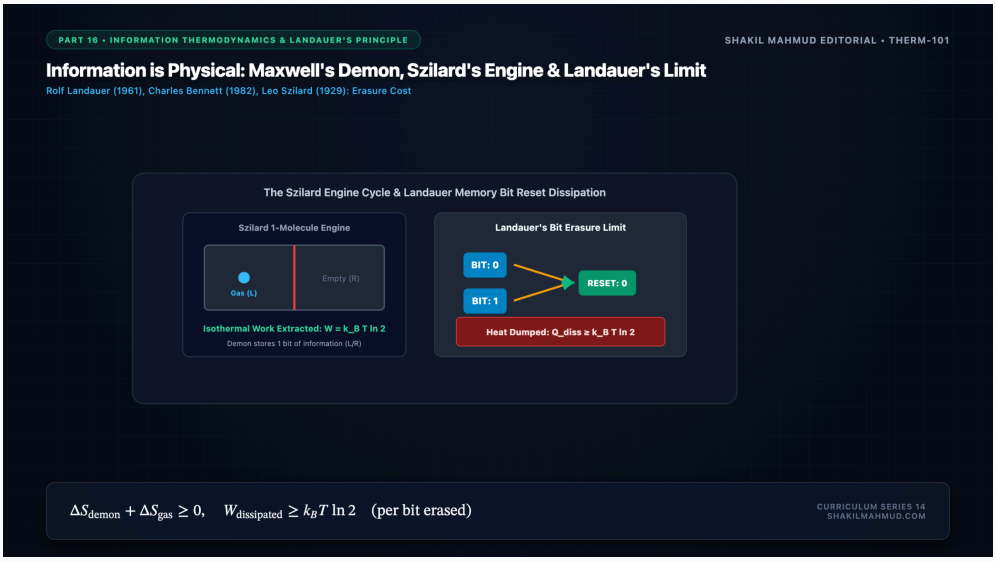
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (২০২৬)। "দ্বৈপায়ন গতি ও সান্দ্রীয় বাধা — ব্রাউনীয় গতি, ল্যাঞ্জেভিন বলবিদ্যা ও ফ্লাকচুয়েশন-ডিসিপেশন"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১৫।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-15-brownian-motion-langevin-fluctuation-dissipation-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ষোড়শ খণ্ড

তথ্যও এক ধরনের পদার্থ — ম্যাক্সওয়েলের ডিমন, জিলার্ড ইঞ্জিন ও ল্যান্ডউয়ারের নীতি

তথ্যও এক ধরনের পদার্থ — ম্যাক্সওয়েলের ডিমন, জিলার্ড ইঞ্জিন ও ল্যান্ডউয়ারের নীতি

580 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৬: *ম্যাক্সওয়েলের ডিমনের জিলার্ড একক-অণু ইঞ্জিন চক্র এবং প্রতি বিট তথ্য মুছে ফেলতে ল্যান্ডউয়ারের $k_B T \ln 2$ সর্বনিম্ন তাপ অপচয় নীতি।*

১৮৬৭ সালে জেমস ক্লার্ক ম্যাক্সওয়েল এমন এক কাল্পনিক সত্ত্বার অবতারণা করেছিলেন যা শতবর্ষ ধরে পদার্থবিজ্ঞানীদের ঘুম হারাম করে রেখেছিল। ধরা যাক একটি পাত্রকে মাঝখানে ছিদ্রযুক্ত একটি দেওয়াল দিয়ে A ও B দুই প্রকোষ্ঠে ভাগ করা হলো। ছিদ্রের মুখে বসে আছে এক অতিক্ষুদ্র বুদ্ধিমান সত্ত্বা—ম্যাক্সওয়েলের "ডিমন" (Demon)। ডিমন প্রতিটি অণুর গতি লক্ষ্য করে। যখন A থেকে দ্রুতগামী গরম অণু আসে, ডিমন দরজা খুলে তাকে B-তে যেতে দেয়; আর যখন B থেকে ধীরগতির শীতল অণু আসে, তাকে A-তে পাঠায়। কোনো যান্ত্রিক কাজ না করেই সময়ের সাথে সাথে প্রকোষ্ঠ B আরও উত্তপ্ত এবং প্রকোষ্ঠ A আরও শীতল হয়ে যায়—যা তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রকে সরাসরি লঙ্ঘন করে। এই ধাঁধার সমাধান করতে বিজ্ঞানীদের সময় লেগেছিল ১১৫ বছর, যা পদার্থবিজ্ঞান ও তথ্যতত্ত্বের (Information Theory) মাঝে এক অমর সেতুবন্ধন তৈরি করে: *তথ্যও এক ধরনের পদার্থ*।

জিলার্ডের একক-অণু ইঞ্জিন (১৯২৯)

১৯২৯ সালে হাঙ্গেরীয় পদার্থবিদ লিও জিলার্ড ম্যাক্সওয়েলের এই চিন্তন-পরীক্ষাকে চরমতম সরল রূপে নামিয়ে আনেন। T তাপমাত্রার আধারের সংস্পর্শে থাকা একটি পাত্রে মাত্র একটি একক গ্যাস কণা রয়েছে। জিলার্ড ইঞ্জিনটি চারটি ধাপে কাজ করে:

1. **দেওয়াল স্থাপন:** পাত্রের ঠিক মাঝখানে একটি ঘর্ষণহীন দেওয়াল নামিয়ে পাত্রটিকে সমান দুই ভাগে ভাগ করা হলো।
2. **পরিমাপ:** পর্যবেক্ষক লক্ষ্য করে কণাটি বামে (L) না ডানে (R) আছে। এর মাধ্যমে পর্যবেক্ষক **১ বিট** তথ্য অর্জন করে।
3. **সমোষ্ণ কাজ আহরণ:** কণাটি যদি বামে থাকে, তবে ডানদিক থেকে একটি পিস্টন যুক্ত করা হয়। কণাটির ধাক্কায় পিস্টন প্রসারিত হয়ে কাজ আহরণ করে:

$$W = k_B T ln 2$$

4. **রিসেট:** দেওয়াল সরিয়ে আদি অবস্থায় ফিরে যাওয়া হয়।

এখানে একটি মাত্র তাপ আধার থেকে ১০০% দক্ষতায় তাপকে কাজে রূপান্তর করা হলো! জিলার্ড বুঝতে পেরেছিলেন যে দ্বিতীয় সূত্র রক্ষা করতে হলে ১ বিট তথ্য সংগ্রহের পেছনে অন্তত $DeltaSgek_B ln 2$ পরিমাণ এন্ট্রপির মূল্য চোকাতে হবে।

পরিমাপের ভুল ধারণা ও ল্যান্ডউয়ারের মূলনীতি (১৯৬১)

বহু দশক ধরে বিজ্ঞানীরা মনে করতেন যে অণুকে দেখতে গিয়ে আলোর ফোটন নিক্ষেপের সময় (পরিমাপের মুহূর্তে) এই শক্তি অপচয় হয়। কিন্তু ১৯৬১ সালে আইবিএমের গবেষক রলফ ল্যান্ডউয়ার এক যুগান্তকারী সত্য উন্মোচন করেন: নিখুঁত কোয়ান্টাম পদ্ধতিতে তথ্য পরিমাপ করতে তাত্ত্বিকভাবে কোনো শক্তির অপচয় প্রয়োজন হয় না!

ল্যান্ডউয়ার দেখান যে শক্তির আসল অপচয় ঘটে পরিমাপে নয়, বরং **তথ্য মুছে ফেলার (Memory Erasure)** মুহূর্তে। একটি চক্রাকার ডিমনকে প্রতিবার নতুন পরিমাপ করার আগে তার স্মৃতিভাণ্ডার থেকে পূর্ববর্তী ১ বিট তথ্য (0 বা 1) মুছে ফেলে আদি শূন্য (0) অবস্থায় ফিরে যেতে হয়:

Shakil Mahmud • Research Monograph

$$0, 1 x right arrow text মুছে ফেলা 0$$

এই প্রক্রিয়াটি যৌক্তিকভাবে অপ্রত্যাবর্তী (logically irreversible)। মেমোরির দুটি ভিন্ন দশাকে একটিমাত্র দশায় সংকুচিত করায় এর নিজস্ব তথ্য এন্ট্রপি হ্রাস পায় $Delta S_{text memory} = -k_B ln 2$। মহাবিশ্বের মোট এন্ট্রপি যেহেতু কমতে পারে না, তাই এই এন্ট্রপিকে তাপ হিসেবে পরিবেশে নিক্ষেপ করতে হয়:

$$Q_{text dissipated} g e k_B T ln 2$$

> ***ল্যান্ডউয়ারের নীতি:*** *যেকোনো যৌক্তিকভাবে অপ্রত্যাবর্তী তথ্য প্রক্রিয়াকরণ—যেমন ১ বিট তথ্য মুছে ফেলার জন্য—পরিবেশে সর্বনিম্ন $W_{text diss} = k_B T ln 2$ পরিমাণ তাপ শক্তি অপচয় করা বাধ্যতামূলক।*

বেনেট কর্তৃক ডিমনের চূড়ান্ত মুক্তি (১৯৮২)

১৯৮২ সালে আইবিএমের চার্লস বেনেট ল্যান্ডউয়ারের নীতি প্রয়োগ করে ম্যাক্সওয়েলের ডিমনের চিরতরে সমাধান করেন। ডিমন কোনো শক্তি খরচ না করেই অণুর গতি মাপতে পারে, কাজও আহরণ করতে পারে। কিন্তু ডিমনের মস্তিষ্ক বা কম্পিউটার একটি ভৌত ব্যবস্থা। চক্র সম্পূর্ণ করতে হলে ডিমনকে তার মেমোরি রিসেট করতে হয়। আর প্রতি বিট তথ্য মুছতে গিয়ে ঠিক $k_B T ln 2$ তাপ পরিবেশে নির্গত হয়—যা আহরিত কাজের সমান হয়ে দ্বিতীয় সূত্রকে অক্ষুণ্ণ রাখে:

$$Delta S_{text total} g epsilon 0$$

কক্ষ তাপমাত্রায় ($৩০০, text K$) ল্যান্ডউয়ারের এই সর্বনিম্ন সীমা হলো $২.৮৭ times ১০^{-২১}, text Joules$। আধুনিক কম্পিউটার চিপগুলো বর্তমানে এর চেয়ে প্রায় ১০০০ গুণ বেশি শক্তি ব্যয় করলেও ভবিষ্যতে ন্যানো-স্কেল কম্পিউটিং এই প্রাকৃতিক সীমার মুখোমুখি হবে। ল্যান্ডউয়ারের অমর বাণী সত্য প্রমাণিত হয়েছিল: তথ্য কোনো বিমূর্ত শূন্যতা নয়, তথ্য হলো খাঁটি পদার্থবিদ্যা।

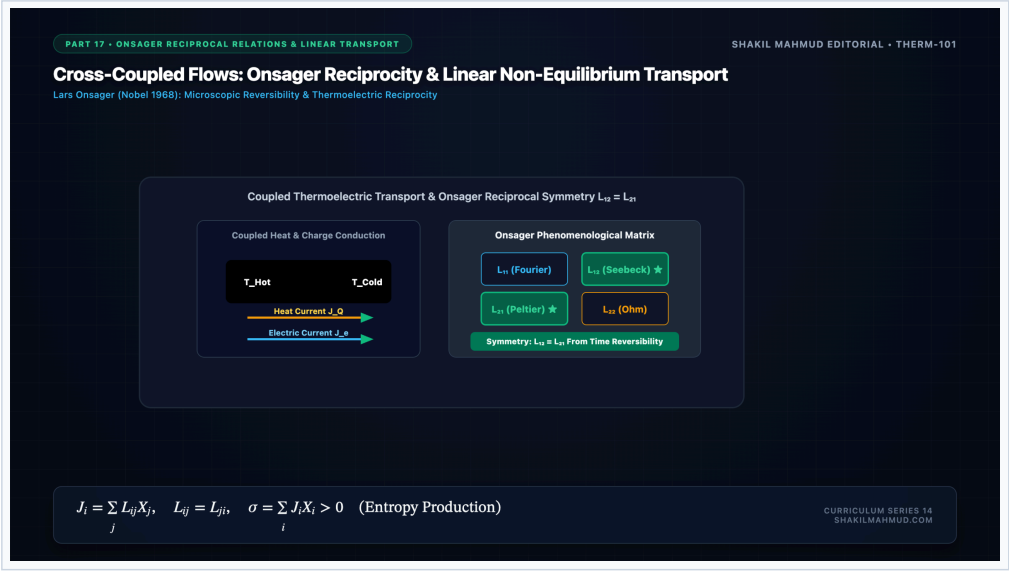
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "তথ্যও এক ধরনের পদার্থ — ম্যাক্সওয়েলের ডিমন, জিলার্ড ইঞ্জিন ও ল্যান্ডউয়ারের নীতি"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১৬।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-16-maxwells-demon-szilard-engine-landauer-principle-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • সপ্তদশ খণ্ড

যুগ্ম প্রবাহের ঐক্য — রৈখিক সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত তাপগতিবিদ্যা ও ওনসাগারের সম্পর্ক

যুগ্ম প্রবাহের ঐক্য — রৈখিক সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত তাপগতিবিদ্যা ও ওনসাগারের সম্পর্ক

517 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৭: *থার্মোইলেকট্রিক যুগ্ম তাপ ও চার্জ পরিবহন, যেখানে মাইক্রোস্কোপিক সময় বিপরীতযোগ্যতা থেকে ওনসাগারের প্রতিসম ম্যাট্রিক্স $L_{12} = L_{21}$ প্রতিষ্ঠিত হয়।*

চিরায়ত তাপগতিবিদ্যাকে আক্ষরিক অর্থে ‘থার্মো-ডাইনামিকস’ না বলে ‘থার্মো-স্ট্যাটিকস’ বলাই যুক্তিযুক্ত। এর চিরায়ত সূত্রগুলো ব্যাখ্যা করত পরম শান্ত ও সাম্যাবস্থায় স্থির হয়ে থাকা অপরিবর্তনীয় ব্যবস্থাকে। অথচ আমাদের জীবন্ত পৃথিবী ও আধুনিক প্রযুক্তি পরিচালিত হয় অবিরত প্রবাহের মাধ্যমে: তাপের প্রবাহ, বৈদ্যুতিক চার্জের সঞ্চালন, রাসায়নিক বিক্রিয়কের বিচ্ছুরণ এবং সান্দ্রীয় ভরবেগের রূপান্তর। ১৯৩১ সালে আটাশ বছর বয়সী নরওয়েজীয় রসায়নবিদ লার্স ওনসাগার *Physical Review* জার্নালে দুটি ঐতিহাসিক গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন, যা তাপগতিবিদ্যাকে অপ্রত্যাবর্তী প্রবাহের জগতে সম্প্রসারিত করে। ওনসাগার আবিষ্কার করেন যে একাধিক পরিবহন প্রক্রিয়া যখন পরস্পরের সাথে যুগ্মভাবে ক্রিয়া করে, তখন প্রকৃতি এক বিস্ময়কর গাণিতিক প্রতিসাম্য কার্যকর করে: আড়াআড়ি পরিবহন ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলো পরস্পর সমান।

তাপগতীয় বল, প্রবাহ ও এন্ট্রপি উৎপাদন

সাম্যাবস্থার কাছাকাছি একটি অপ্রত্যাবর্তী ব্যবস্থাকে বিশ্লেষণ করতে আমরা স্থানীয় আয়তনের উপব্যবস্থা কল্পনা করি। ব্যবস্থার ভেতরে তীব্র চলকের যেকোনো ব্যবধান বা গ্রেডিয়েন্ট তৈরি করে ধারাবাহিক **প্রবাহ বা ফ্লাক্স (J_i)** (যেমন তাপ প্রবাহ $mathbf{J}_q$ বা বিদ্যুৎ প্রবাহ $mathbf{J}_e$)। প্রতিটি প্রবাহ পরিচালিত হয় তার নিজস্ব অনুবন্ধী **তাপগতীয় বল (X_i)** দ্বারা:

- তাপ পরিবহনের জন্য বল: $X_q = -fracnablaTT^2$
- বিদ্যুৎ পরিবহনের জন্য বল: $X_e = -fracnablaVT$
- রাসায়নিক বিচ্ছুরণের জন্য বল: $X_k = -nablaleft(fracmu_kTright)$

দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে অপ্রত্যাবর্তী প্রবাহ অনবরত এন্ট্রপি সৃষ্টি করে। প্রতি একক আয়তনে প্রতি সেকেন্ডে **এন্ট্রপি উৎপাদনের হার ($sigma$)** হলো প্রবাহ ও বলের একটি দ্বি-রৈখিক সমষ্টি:

$$sigma = sum_i J_i X_i ge 0$$

এই অসমতা $sigmage0$ প্রমাণ করে যে মহাবিশ্বে এন্ট্রপি কেবল সৃষ্টিই হতে পারে, কখনো ধ্বংস হতে পারে না।

রৈখিক পরিবহন সম্পর্ক ও যুগ্ম মিথস্ক্রিয়া

সাম্যাবস্থার কাছাকাছি চালিকা বলগুলোর মান ক্ষুদ্র হওয়ায় প্রতিটি প্রবাহকে সকল বলের একটি রৈখিক সমষ্টি হিসেবে প্রকাশ করা যায়:

$$J_i = sum_j L_{ij} X_j$$

এখানে L_{ij} হলো পরিবহন সহগ:

Shakil Mahmud • Research Monograph

- কর্ণ উপাদানগুলো L_{ii} চিরায়ত সূত্র নির্দেশ করে: যেমন ফুরিয়ারের তাপ পরিবাহিতা বা ওহমের বিদ্যুৎ পরিবাহিতা।
- অ-কর্ণীয় উপাদানগুলো L_{ij} $(inej)$ নির্দেশ করে **যুগ্ম মিথস্ক্রিয়া (cross-coupling)**—যেখানে এক বিষয়ের গ্রেডিয়েন্ট সম্পূর্ণ ভিন্ন একটি ভৌত রাশির প্রবাহ তৈরি করে!

এর সবচেয়ে উজ্জ্বল উদাহরণ হলো থার্মোইলেকট্রিসিটি: তাপমাত্রার পার্থক্য $nablaT$ কেবল তাপই পরিবহন করে না, তা ধাতুর ইলেকট্রনগুলোকে ঠেলে দিয়ে ভোল্টেজ বা বিদ্যুৎ প্রবাহ তৈরি করে (**সীবেক ক্রিয়া / Seebeck Effect**, L_{eq})। বিপরীতভাবে ধাতব সংযোগে বিদ্যুৎ চালনা করলে তা তাপ টেনে নিয়ে শীতল বা উত্তপ্ত করে তোলে (**পেল্টিয়ার ক্রিয়া / Peltier Effect**, L_{qe})।

ওনসাগারের প্রতিসাম্য উপপাদ্য ও মাইক্রোস্কোপিক রিভার্সিবিলিটি

প্রায় এক শতাব্দী ধরে প্রকৌশলীরা সীবেক ও পেল্টিয়ার সহগকে দুটি সম্পূর্ণ স্বাধীন বৈশিষ্ট্য মনে করতেন। কিন্তু ১৯৩১ সালে ওনসাগার হ্যামিল্টনীয় মেকানিক্সের আণুবীক্ষণিক কাল-প্রতিসাম্য ($langlealpha_i(0)alpha_j(t)rangle = langlealpha_i(t)alpha_j(0)rangle$) প্রয়োগ করে প্রমাণ করেন তার অবিস্মরণীয় উপপাদ্য:

> ***ওনসাগার রেসিপ্রোকাল সম্পর্ক:*** *যদি তাপগতীয় বল X_i এবং প্রবাহ J_i এমনভাবে নির্বাচিত হয় যাতে এন্ট্রপি উৎপাদন $sigma = sumJ_iX_i$ হয়, তবে পরিবহন ম্যাট্রিক্সটি সর্বদা নিখুঁত প্রতিসম হতে বাধ্য:*
>
> $$L_{ij} = L_{ji}$$

ব্যবস্থায় বাহ্যিক চৌম্বক ক্ষেত্র $mathbfB$ উপস্থিত থাকলে ক্যাসিমির এর রূপ নির্ধারণ করেন: $L_{ij}(mathbfB) = L_{ji}(-mathbfB)$।

তাপগতিবিদ্যার চতুর্থ সূত্র

ওনসাগারের এই সম্পর্কটি বিজ্ঞানে এত গভীর যে বহু বিজ্ঞানী একে “তাপগতিবিদ্যার চতুর্থ সূত্র” হিসেবে অভিহিত করেন। এটি প্রমাণ করে যে প্রকৃতির আড়াআড়ি প্রভাবগুলো এক অলৌকিক সুরে বাঁধা: তাপমাত্রার পার্থক্য যত সহজে ভোল্টেজ তৈরি করতে পারে, একটি ভোল্টেজ ঠিক ততখানি নিখুঁত দক্ষতায় তাপীয় পাম্পিং করতে সক্ষম।

গবেষণাপত্র প্রকাশের দীর্ঘ সাঁইত্রিশ বছর পর ১৯৬৮ সালে লার্স ওনসাগারকে রসায়নে নোবেল পুরস্কার প্রদান করা হয়। ওনসাগারের এই সূত্রই আধুনিক অপ্রত্যাবর্তী তাপগতিবিদ্যার স্বর্ণদ্বার উন্মোচন করেছিল।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "যুগ্ম প্রবাহের ঐক্য — রৈখিক সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত তাপগতিবিদ্যা ও ওনসাগারের সম্পর্ক"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১৭।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-17-onsager-reciprocal-relations-linear-transport-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • অষ্টাদশ খণ্ড

বিশৃঙ্খলা থেকে শৃঙ্খলা — চরম সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত পদার্থবিদ্যা ও প্রিগোজিনের ডিসিপেটিভ রূপ

বিশৃঙ্খলা থেকে শৃঙ্খলা — চরম সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত পদার্থবিদ্যা ও প্রিগোজিনের ডিসিপেটিভ রূপ

585 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৮: *সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত তাপগতিবিদ্যায় ভালপালা বিস্তারকারী ডিসিপেটিভ কাঠামো এবং বেলোউসভ-ঝাবোটিনস্কি রাসায়নিক সর্পিলাকার স্বতঃ-সংগঠন।*

তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র যদি দাবি করে যে এন্ট্রপি অবিরত বৃদ্ধি পেয়ে মহাবিশ্বকে সম্পূর্ণ ধ্বংস, বিশৃঙ্খলা ও তাপীয় মৃত্যুর দিকে ঠেলে দেবে—তবে এই মহাবিশ্বে গ্যালাক্সি, নক্ষত্র, গ্রহ, জীবকোষ ও মানুষের মতো সচেতন বুদ্ধিমত্তার সৃষ্টি হলো কীভাবে? জীবন কি তবে পদার্থবিজ্ঞানের সূত্রের বিরুদ্ধে এক বেআইনি বিদ্রোহ? ১৯৬০ ও ১৯৭০-এর দশকে রাশিয়ান বংশোদ্ভূত বেলজিয়ান রসায়নবিদ ইলিয়া প্রিগোজিন এবং ব্রাসেলস স্কুল প্রমাণ করেন যে সাম্যাবস্থা থেকে বহু দূরে গেলে দ্বিতীয় সূত্র শৃঙ্খলা ধ্বংস করে না—বরং শৃঙ্খলা সৃষ্টি করে! বাইরে থেকে শক্তি ও পদার্থের অবিরাম প্রবাহ যখন কোনো ব্যবস্থাকে নাড়িয়ে দেয়, তখন ক্লাসিক্যাল সাম্যাবস্থা ভেঙে গিয়ে স্বতঃস্ফূর্তভাবে জন্ম নেয় চোখ ধাঁধানো স্বতঃ-সংগঠিত কাঠামো: **ডিসিপেটিভ কাঠামো (Dissipative Structures)**।

সাম্যাবস্থার কাছাকাছি স্থায়িত্ব বনাম চরম দূরত্বের অস্থিরতা

রৈখিক তাপগতিবিদ্যায় প্রিগোজিন প্রতিষ্ঠা করেছিলেন **সর্বনিম্ন এন্ট্রপি উৎপাদন উপপাদ্য (Theorem of Minimum Entropy Production)**: সাম্যাবস্থার কাছাকাছি থাকা যেকোনো ব্যবস্থা এমন একটি অবস্থায় পৌঁছায় যেখানে তার এন্ট্রপি উৎপাদনের হার সর্বনিম্ন হয়। এই অবস্থায় ব্যবস্থাটি পরম স্থিতিশীল—যেকোনো ছোটখাটো ওঠানামা সাথে সাথে মিলিয়ে গিয়ে আদি একঘেয়ে অবস্থায় ফিরে আসে।

কিন্তু যখন বাহ্যিক চালিকা শক্তি $lambda$ বৃদ্ধি পেয়ে একটি নির্দিষ্ট চরম সীমা $lambda_c$ অতিক্রম করে, তখন রৈখিক তত্ত্ব পুরোপুরি ভেঙে পড়ে। প্রিগোজিন এবং পল গ্ল্যান্সডর্ফ এন্ট্রপির দ্বিতীয় মাত্রার পরিবর্তনের মাধ্যমে **গ্ল্যান্সডর্ফ-প্রিগোজিন স্থায়িত্ব মানদণ্ড** প্রতিষ্ঠা করেন:

sum_{i} delta J_i , delta X_i > 0 quad (text{স্থিতিশীলতা})

যখন অতিরিক্ত এন্ট্রপি উৎপাদনের মান ঋণাত্মক হয়ে যায় (sum delta J_i , delta X_i < 0), তখন ব্যবস্থাটি এক ভয়ানক **বাইফারকেশন বা দ্বি-বিভাজনের (Bifurcation)** মুখোমুখি হয়। আণুবীক্ষণিক অতি-ক্ষুদ্র এলোমেলো ওঠানামাগুলো মুহূর্তে ম্যাক্রোস্কোপিক স্কেলে ছড়িয়ে পড়ে পুরো ব্যবস্থাকে সম্পূর্ণ নতুন এক গতিশীল রূপ দেয়।

ডিসিপেটিভ কাঠামো কী?

প্রিগোজিন এই নতুন রূপের নাম দেন **ডিসিপেটিভ কাঠামো (Dissipative Structure)**। স্ফটিক বা পাথরের মতো চিরায়ত কাঠামোগুলো কোনো শক্তি খরচ না করেই শতাব্দীর পর শতাব্দী স্থির থাকতে পারে। কিন্তু ডিসিপেটিভ কাঠামো হলো এমন এক গতিশীল জীবন্ত রূপ—যা কেবল তখনই টিকে থাকে যখন সে অবিরাম বাইরে থেকে মুক্ত শক্তি গ্রহণ করে এবং পরিবেশে প্রচুর পরিমাণে এন্ট্রপি অপচয় (dissipate) করে।

মোট এন্ট্রপির পরিবর্তনকে অভ্যন্তরীণ উৎপাদন $d_i S$ এবং পরিবেশীয় আদান-প্রদান $d_e S$-এ ভাগ করলে দেখা যায়:

$$dS = d_e S + d_i S, quad d_i S ge 0$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

যদিও অভ্যন্তরীণ এন্ট্রপি উৎপাদন সর্বদা ধনাত্মক (d_iSge0), কিন্তু উন্মুক্ত ব্যবস্থা বাইরে এত বিপুল পরিমাণ এন্ট্রপি নিক্ষেপ করতে পারে (d_e S < 0) যে তার অভ্যন্তরীণ মোট এন্ট্রপির পরিবর্তন ঋণাত্মক হয়ে যায়:

|d_e S| > d_i S implies dS < 0

এর ফলে ব্যবস্থার অভ্যন্তরীণ শৃঙ্খলা বৃদ্ধি পায়! দ্বিতীয় সূত্র ভঙ্গ না করে বরং বাইরে কোটি কোটি গুণ বিশৃঙ্খলা ছড়িয়ে দিয়ে স্থানীয়ভাবে সুশৃঙ্খল জটিলতার জন্ম দেওয়া সম্ভব হয়।

প্রকৃতির স্বতঃ-সংগঠনের নিদর্শন: বেনার্ড সেল ও বিজেড বিক্রিয়া

ডিসিপেটিভ কাঠামোর নিদর্শন প্রকৃতিতে সর্বত্র বিদ্যমান:

- **রেলে-বেনার্ড পরিচলন (Rayleigh-Bénard Convection):** একটি পাত্রে তরল তেল রেখে নিচ থেকে তাপ দিলে শুরুতে তাপ শান্তভাবে পরিবাহিত হয়। কিন্তু তাপমাত্রার ব্যবধান সন্ধি মান ($Ra_capprox১৭০৮$) পার হলেই কোটি কোটি তেলের অণু হঠাৎ নিজেদের মধ্যে সমন্বয় তৈরি করে নিয়মিত ষড়ভুজাকার ঘূর্ণন কোষে বিভক্ত হয়ে নৃত্য করতে শুরু করে।
- **বেলোউসভ-ঝাবোটিনস্কি (BZ) বিক্রিয়া:** রাসায়নিক উপাদান মিশিয়ে দিলে তা ধীরে ধীরে একঘেয়ে বাদামী রঙে পরিণত হওয়ার বদলে ঘড়ির মতো পর্যায়বৃত্তভাবে লাল ও নীল রঙে স্পন্দিত হতে থাকে। পাত্রে ঢাললে তা তৈরি করে চলমান সর্পিলাকার ঘূর্ণি তরঙ্গ (spiral waves)—যা অ্যালান ট্যুরিংয়ের মরফোজেনেসিস সমীকরণ মেনে চলে।

জটিলতার জননী তাপগতিবিদ্যা

দুই শতাব্দী ধরে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রকে প্রকৃতির এক নির্মম জল্লাদ মনে করা হতো—যার কাজ কেবল মহাবিশ্বকে ক্ষয় ও ধ্বংসের দিকে ঠেলে দেওয়া। প্রিগোজিন এই দৃষ্টিভঙ্গিকে চিরতরে বদলে দেন। ডিসিপেটিভ কাঠামোর এই যুগান্তকারী আবিষ্কারের জন্য তিনি ১৯৭৭ সালে রসায়নে নোবেল পুরস্কার লাভ করেন। সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত তাপগতিবিদ্যা প্রমাণ করেছিল যে জীবকোষ, উদ্ভিদ, প্রাণিজগৎ এবং মানব সভ্যতা কোনো বিরল দুর্ঘটনা নয়; বরং মহাবিশ্বের মুক্ত শক্তি প্রবাহের ওপর ভর করে বিশৃঙ্খলা থেকে শৃঙ্খলা সৃষ্টির এক অনন্য ও স্বাভাবিক মহাজাগতিক রূপায়ন।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "বিশৃঙ্খলা থেকে শৃঙ্খলা — চরম সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত পদার্থবিদ্যা ও প্রিগোজিনের ডিসিপেটিভ রূপ"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১৮।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-18-dissipative-structures-prigogine-bifurcations-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • উনবিংশ খণ্ড

ওঠানামার জগতে নিখুঁত কার্য — স্টোকাস্টিক তাপগতিবিদ্যা ও জারজিনস্কি-ক্রুক্স সমীকরণ

ওঠানামার জগতে নিখুঁত কার্য — স্টোকাস্টিক তাপগতিবিদ্যা ও জারজিনস্কি-ক্রুক্স সমীকরণ

565 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৯: *ক্রুক্স ফ্লাকচুয়েশন থিওরেম অনুসারে $W = \Delta F$ বিন্দুতে সম্মুখ ও বিপরীতমুখী সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত কার্য বণ্টনের নিখুঁত ছেদবিন্দু।*

প্রায় ১৭০ বছর ধরে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রটি পাথরে খোদাই করা এক অলঙ্ঘনীয় অসমতা হিসেবে প্রতিষ্ঠিত ছিল: $langleWranglegeDeltaF$। যেকোনো ব্যবস্থাকে একটি নির্দিষ্ট সসীম সময়ে এক অবস্থা থেকে অন্য অবস্থায় টেনে নিয়ে গেলে ঘর্ষণ ও অপ্রত্যাবর্তী অপচয়ের কারণে প্রযুক্ত গড় কাজ সর্বদা মুক্ত শক্তির পার্থক্যের চেয়ে বেশি হতে বাধ্য। কিন্তু ব্যবস্থাটি যদি ১০^{২৩}টি অণু ধারণকারী কোনো দানবীয় বাষ্পীয় ইঞ্জিন না হয়ে মাত্র একটি একক প্রোটিন অণু বা ডিএনএ অণু হয়—যাকে লেজার রশ্মির অপটিক্যাল চিমটা (optical tweezers) দিয়ে টেনে খোলা হচ্ছে? ন্যানোস্কেলে তাপীয় ধাক্কা এত প্রবল যে কিছু কিছু ক্ষেত্রে অণুটি আশেপাশের তরল থেকে শক্তি শোষণ করে এমন পথ অতিক্রম করে যেখানে কাজ মুক্ত শক্তির চেয়েও কম হয় (W < Delta F)! ১৯৯৭ সালে ক্রিস্টোফার জারজিনস্কি দ্বিতীয় সূত্রকে একটি নিখুঁত গাণিতিক সমতায় রূপান্তর করে আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানে নতুন বিপ্লবের সূচনা করেন।

জারজিনস্কির নন-ইকুইলিব্রিয়াম সমীকরণ (১৯৯৭)

T তাপমাত্রার আধারের সংস্পর্শে থাকা একটি ব্যবস্থাকে $lambda(t)$ প্রটোকল অনুসারে অত্যন্ত দ্রুত ও হিংস্রভাবে আদি অবস্থা A থেকে চূড়ান্ত অবস্থা B-তে নিয়ে যাওয়া হলো। প্রক্রিয়াটি সাম্যাবস্থা থেকে যত দূরেই ঘটুক না কেন, প্রতিটি একক গতিপথে কৃতকাজ W একটি স্টোকাস্টিক দৈব চলক—যা একটি সম্ভাবনা বণ্টন $P(W)$ মেনে চলে। ক্রিস্টোফার জারজিনস্কি প্রমাণ করেন তার অমর সমীকরণ:

$$leftlangle e^{-betaW} rightrangle = e^{-betaDeltaF}$$

যেখানে Delta F = F_B – F_A হলো আদি ও অন্তিম সাম্যাবস্থার মধ্যকার হেলমহোল্টজ মুক্ত শক্তির পার্থক্য। সমীকরণটির দিকে তাকালে বিস্ময়ে স্তব্ধ হতে হয়: বামপাশে রয়েছে সাম্যাবস্থা-বহির্ভূত চরম বিশৃঙ্খল ও অপ্রত্যাবর্তী পথের এক্সপোনেনশিয়াল গড়, অথচ ডানপাশে রয়েছে কেবল শান্ত সাম্যাবস্থার মুক্ত শক্তি!

জেনসেনের অসমতা ও দ্বিতীয় সূত্রের পুনর্জন্ম

জারজিনস্কির এই সমতা চিরায়ত দ্বিতীয় সূত্রের সাথে কীভাবে খাপ খায়? এক্সপোনেনশিয়াল অপেক্ষক $f(x) = e^{-x}$ হলো একটি উত্তল (convex) অপেক্ষক। উত্তল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে বিখ্যাত **জেনসেনের অসমতা (Jensen's Inequality)** হলো $langlee^{X}ranglegee^{langleXrangle}$। জারজিনস্কির সমীকরণে জেনসেনের অসমতা বসালে পাওয়া যায়:

$$e^{-betalangleWrangle}leleftlangle e^{-betaW} rightrangle = e^{-betaDeltaF} implies -betalangleWranglele -betaDeltaF implieslangleWranglegeDeltaF$$

মাত্র এক লাইনের বীজগণিতে চিরায়ত তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রটি প্রমাণ হয়ে গেল! দ্বিতীয় সূত্র কোনো পৃথক মৌলিক স্বতঃসিদ্ধ নয়; এটি হলো জারজিনস্কির গভীরে থাকা নিখুঁত সমীকরণের একটি ছায়া মাত্র।

Shakil Mahmud • Research Monograph

ক্রুক্স ফ্লাকচুয়েশন উপপাদ্য (১৯৯৯)

১৯৯৯ সালে গ্যাভিন ক্রুক্স সম্মুখ এবং বিপরীতমুখী গতিপথের মাঝে এক আরও গভীর প্রতিসাম্য আবিষ্কার করেন। সম্মুখ প্রক্রিয়ায় কাজের সম্ভাবনা বণ্টন যদি $P_F(W)$ হয় এবং বিপরীতমুখী প্রক্রিয়ায় কাজের সম্ভাবনা যদি $P_R(-W)$ হয়, তবে তাদের অনুপাত দাঁড়ায়:

frac{P_F(W)}{P_R(-W)} = expleft(frac{W – Delta F}{k_B T} right)

এটি হলো **ক্রুক্স ফ্লাকচুয়েশন উপপাদ্য (Crooks Fluctuation Theorem)**। এই উপপাদ্য দেখায়:

1. সম্মুখ ও বিপরীতমুখী কাজের বক্ররেখা দুটি ঠিক একটি বিন্দুতেই পরস্পরকে ছেদ করে: যেখানে $W = DeltaF$। এর ফলে অপটিক্যাল চিমটা দিয়ে একটি একক অণুকে বারবার টেনে ও ছেড়ে দিয়ে পরীক্ষাগারে নিখুঁতভাবে তার মুক্ত শক্তি $DeltaF$ পরিমাপ করা সম্ভব হয়।
2. উভয় পাশে সমাকলন করলে সরাসরি জারজিনস্কির সমীকরণ বেরিয়ে আসে।

স্টোকাস্টিক তাপগতিবিদ্যা ও দ্বিতীয় সূত্রের ক্ষণস্থায়ী লঙ্ঘন

২০০৫ সালে উডো সাইফার্ট একক কণার গতিপথ ধরে এন্ট্রপি সংজ্ঞায়িত করেন। সামগ্রিক এন্ট্রপি উৎপাদনের জন্য **ইন্টিগ্রাল ফ্লাকচুয়েশন উপপাদ্য** বলে:

$$leftlangle e^{-Deltas_{texttot}/k_B} rightrangle = 1$$

এখান থেকে দেখা যায় যে ক্ষণিকের জন্য এন্ট্রপি কমে যাওয়ার সম্ভাবনা (Delta s = -zeta < 0) হলো:

$$fracP(-zeta)P(+zeta) = e^{-zeta/k_B}$$

একটি একক প্রোটিন অণুর জন্য ক্ষণিকের জন্য এন্ট্রপি কমে যাওয়া খুবই স্বাভাবিক (প্রায় ৫% ক্ষেত্রে এটি ঘটে)। কিন্তু দৃশ্যমান ম্যাক্রোস্কোপিক বস্তুর ক্ষেত্রে $zetaapprox১০^{২০}k_B$ হওয়ায় এই সম্ভাবনা $e^{-১০^{২০}}$-এ নেমে আসে—যা মহাবিশ্বের সমগ্র আয়ুষ্কালেও একবার ঘটা অসম্ভব। আণুবীক্ষণিক ন্যানো-জগতে দ্বিতীয় সূত্র কোনো কারাগারের দেয়াল নয়; এটি হলো এক নিখুঁত পরিসংখ্যানিক প্রতিসাম্য।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ওঠানামার জগতে নিখুঁত কার্য — স্টোকাস্টিক তাপগতিবিদ্যা ও জারজিনস্কি-ক্রুক্স সমীকরণ"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ১৯।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-19-stochastic-thermodynamics-jarzynski-crooks-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • বিংশ খণ্ড

এন্ট্রপির দিগন্ত — বেকেনস্টাইন-হকিং বলবিদ্যা, হলোগ্রাফি ও মহাজাগতিক সময়ের তির

এন্ট্রপির দিগন্ত — বেকেনস্টাইন-হকিং বলবিদ্যা, হলোগ্রাফি ও মহাজাগতিক সময়ের তির

699 শব্দ • November 4, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ২০: *বেকেনস্টাইন-হকিং ইভেন্ট হরাইজন প্ল্যাঙ্ক-ক্ষেত্রফল কোয়ান্টায়ন, ভার্চুয়াল কণা জোড় সৃষ্টি এবং মহাজাগতিক সময়ের অভিমুখ।*

১৯৭০-এর দশকের শুরুতে প্রিন্সটন বিশ্ববিদ্যালয়ে জন আর্চিবল্ড হুইলার তার পিএইচডি ছাত্র জ্যাকব বেকেনস্টাইনকে একটি নিরীহ প্রশ্ন করেছিলেন: এক কাপ গরম চা যদি ব্ল্যাক হোলে ফেলে দেওয়া হয়, তবে চা-এর এন্ট্রপিসহ সবকিছু চিরতরে ইভেন্ট হরাইজনের পেছনে হারিয়ে যায়। এর ফলে কি মহাবিশ্বের মোট এন্ট্রপি কমে গেল—যা তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রকে সরাসরি লঙ্ঘন করে? হুইলার একে রসিকতা করে বলেছিলেন “এন্ট্রপি পাচার”। এই প্রশ্নের উত্তরে বেকেনস্টাইনের দুঃসাহসী প্রস্তাব এবং পরবর্তীতে স্টিফেন হকিংয়ের কোয়ান্টাম বিকিরণের আবিষ্কার আধুনিক পদার্থবিজ্ঞানের ভিত্তিমূল কাঁপিয়ে দেয়। জন্ম নেয় আধুনিক তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানের সবচেয়ে বিস্ময়কর সত্য: **হলোগ্রাফিক নীতি (The Holographic Principle)**।

বেকেনস্টাইনের অনুমান ও ব্ল্যাক হোলের ক্ষেত্রফল

চিরায়ত সাধারণ আপেক্ষিকতা অনুসারে ব্ল্যাক হোলের কোনো জটিল অভ্যন্তরীণ রূপ নেই (“No-Hair Theorem”)। একটি স্থিতিশীল ব্ল্যাক হোল মাত্র তিনটি সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত হয়: ভর M, কৌণিক ভরবেগ J এবং বৈদ্যুতিক চার্জ Q। নক্ষত্রের সমস্ত আণবিক ইতিহাস ইভেন্ট হরাইজনের সীমানার পেছনে চিরতরে ঢাকা পড়ে যায়।

১৯৭১ সালে স্টিফেন হকিং তার বিখ্যাত **ক্ষেত্রফল উপপাদ্য (Area Theorem)** প্রমাণ করেন: যেকোনো চিরায়ত প্রক্রিয়ায়—এমনকি দুটি ব্ল্যাক হোল পরস্পর সংঘর্ষে একীভূত হলেও—ইভেন্ট হরাইজনের মোট ক্ষেত্রফল A কখনোই হ্রাস পেতে পারে না:

$$DeltaAge0$$

বেকেনস্টাইন এক যুগান্তকারী দূরদৃষ্টি প্রদর্শন করলেন। তিনি বললেন, ক্ষেত্রফলের এই কখনো না কমার নিয়ম ($DeltaAge0$) কোনো কাকতালীয় জ্যামিতি নয়; এটি মূলত তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের মহাজাগতিক রূপ! বেকেনস্টাইন প্রস্তাব করলেন যে একটি ব্ল্যাক হোলের প্রকৃত তাপগতীয় এন্ট্রপি রয়েছে, যা তার ইভেন্ট হরাইজনের ক্ষেত্রফল A-এর সমানুপাতিক:

$$S_{textBH}proptoA$$

আর এর মাধ্যমে তিনি প্রতিষ্ঠা করেন **সাধারণীকৃত দ্বিতীয় সূত্র (Generalized Second Law)**: যেকোনো প্রক্রিয়ায় ব্ল্যাক হোলের বাইরের পদার্থ এবং ব্ল্যাক হোলের নিজস্ব এন্ট্রপির সমষ্টি সর্বদা বৃদ্ধি পাবে ($DeltaS_{texttotal}ge0$)।

হকিং বিকিরণ ও নিখুঁত এন্ট্রপি সমীকরণ (১৯৭৪)

হকিং শুরুতে বেকেনস্টাইনের এই ধারণাকে ভুল প্রমাণের চেষ্টা করেছিলেন। কারণ একটি ব্ল্যাক হোলের যদি এন্ট্রপি থাকে, তবে তাপগতিবিদ্যা অনুসারে তার একটি নির্দিষ্ট অশূন্য তাপমাত্রাও (T > 0) থাকতে হবে। কিন্তু তাপমাত্রা থাকার অর্থ হলো তা থেকে তাপীয় বিকিরণ বের হতে হবে—অথচ আপেক্ষিকতা অনুসারে ব্ল্যাক হোল থেকে আলো পর্যন্ত পালাতে পারে না!

Shakil Mahmud • Research Monograph

বেকেনস্টাইনকে ভুল প্রমাণ করতে গিয়ে হকিং ইভেন্ট হরাইজনের কাছাকাছি বক্র স্থানকালে কোয়ান্টাম ফিল্ড থিওরি প্রয়োগ করে হিসাব শুরু করেন। আর তখনই উন্মোচিত হয় বিংশ শতাব্দীর অন্যতম শ্রেষ্ঠ আবিষ্কার: ইভেন্ট হরাইজনের ঠিক সীমানায় কোয়ান্টাম শূন্যতার ওঠানামায় অনবরত ভার্চুয়াল কণা-প্রতিকণা জোড় তৈরি হচ্ছে। এদের মধ্যে ঋণাত্মক শক্তির কণাটি ব্ল্যাক হোলের ভেতর পতিত হয় এবং ধনাত্মক শক্তির সঙ্গী কণাটি মহাকাশে মুক্ত হয়ে কৃষ্ণবস্তুর মতো বিকিরণ নির্গত করে—যা আজ **হকিং বিকিরণ (Hawking Radiation)** নামে অমর।

হকিং প্রমাণ করেন যে ব্ল্যাক হোলের একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রা রয়েছে:

$$T_H = frachbarc^38piGMk_B$$

এর ফলে বেকেনস্টাইনের অনুমানের ধ্রুবকটি নিখুঁতভাবে নির্ধারিত হয় ঠিক এক-চতুর্থাংশ ($১/৪$), যা জন্ম দেয় কালজয়ী **বেকেনস্টাইন-হকিং এন্ট্রপি সমীকরণ**:

$$S_{textBH} = frack_Bc^3A4Ghbar = frack_BA4ell_P^2$$

যেখানে $ell_P = sqrtGhbar/c^3approx১.৬১৬times১০^{-৩৫}, textমিটার$ হলো প্ল্যাঙ্ক দৈর্ঘ্য। ইভেন্ট হরাইজনের প্রতি এক প্ল্যাঙ্ক ক্ষেত্রফল (ell_P^2) ঠিক এক-চতুর্থাংশ বিট এন্ট্রপি ধারণ করে!

ব্ল্যাক হোল বলবিদ্যার চারটি সূত্র

তাপগতিবিদ্যা এবং ব্ল্যাক হোল মেকানিক্সের মধ্যে নিখুঁত মিল প্রতিষ্ঠিত হলো:

- **শূন্যতম সূত্র:** সাম্যাবস্থায় তাপমাত্রা T সর্বত্র সমান $longleftrightarrow$ স্থিতিশীল ব্ল্যাক হোলের ইভেন্ট হরাইজনে পৃষ্ঠ মহাকর্ষ $kappa$ ধ্রুবক।
- **প্রথম সূত্র:** dE = T dS – P dV longleftrightarrow dM = frac{kappa}{8pi} dA + Omega dJ + Phi dQ।
- **দ্বিতীয় সূত্র:** $DeltaSge0longleftrightarrowDeltaAge0$।
- **তৃতীয় সূত্র:** পরম শূন্য তাপমাত্রায় ($T = 0$) পৌঁছানো অসম্ভব $longleftrightarrow$ সসীম ধাপে পৃষ্ঠ মহাকর্ষ শূন্যে ($kappa = 0$) নামানো অসম্ভব।

হলোগ্রাফিক নীতি ও মহাজাগতিক সময়ের তির

বেকেনস্টাইন-হকিং সমীকরণ পদার্থবিজ্ঞানের সবচেয়ে অবিশ্বাস্য রহস্য উন্মোচন করে: *মহাকর্ষের উপস্থিতিতে এন্ট্রপি আয়তনের ওপর নির্ভর করে না, নির্ভর করে ক্ষেত্রফলের ওপর!* সাধারণ গ্যাসে আয়তন দ্বিগুণ করলে এন্ট্রপি দ্বিগুণ হয় ($SproptoV$)। কিন্তু কোনো স্থানে অতিরিক্ত তথ্য জমা করলে তা ব্ল্যাক হোলে পরিণত হয়, যার সর্বোচ্চ এন্ট্রপি তার দ্বি-মাত্রিক সীমানা ক্ষেত্রফল A দ্বারা আবদ্ধ।

১৯৯৩ সালে জেরার্ড 'ট হুফ্ট এবং লিওনার্ড সাসকাইন্ড একে সাধারণ রূপ দিয়ে প্রতিষ্ঠা করেন **হলোগ্রাফিক নীতি (Holographic Principle)**: একটি ত্রিমাত্রিক জগতের সমস্ত তথ্য ও পদার্থবিজ্ঞান হুবহু তার চারপাশের দ্বি-মাত্রিক সীমানার কোয়ান্টাম তথ্য দ্বারা সম্পূর্ণ ব্যাখ্যা করা সম্ভব!

কার্নোর বাষ্পীয় ইঞ্জিন ও বোল্টজম্যানের সংঘর্ষ থেকে শুরু করে কোয়ান্টাম ঘনীভবন, অপ্রত্যাবর্তী ডিসিপেটিভ রূপ এবং ব্ল্যাক হোলের ইভেন্ট হরাইজন—পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা বাস্তবতার মহান রূপকে এক সুতোয় বেঁধে দিয়েছে। টেবিলে রাখা এক কাপ কফি ঠান্ডা হওয়ার সাধারণ নিয়মটিই মূলত মহাবিশ্বের ব্ল্যাক হোলের বিলোপ এবং মহাজাগতিক সময়ের তিরের অভিমুখ নিয়ন্ত্রণ করছে। তাপগতিবিদ্যা পদার্থবিজ্ঞানের কোনো সাধারণ অধ্যায় নয়; এটি হলো স্বয়ং প্রকৃতির সার্বজনীন ব্যাকরণ।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "এন্ট্রপির দিগন্ত — বেকেনস্টাইন-হকিং বলবিদ্যা, হলোগ্রাফি ও মহাজাগতিক সময়ের তির"। পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপগতিবিদ্যা, খণ্ড ২০।
https://shakilmahmud.com/bn/statistical-mechanics-and-thermodynamics-part-20-black-hole-thermodynamics-holography-cosmic-arrow-bn/

আকর গ্রন্থ ও গবেষণা সূত্র

নির্বাচিত গ্রন্থপঞ্জি

এই মনোগ্রাফে আলোচিত তত্ত্ব, গাণিতিক প্রতিপাদন এবং ঐতিহাসিক বিশ্লেষণের ভিত্তি হিসেবে নিম্নলিখিত আকর গ্রন্থ ও প্রাথমিক গবেষণাপত্রসমূহ ব্যবহৃত হয়েছে:

Carnot, Sadi (1824). *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance.* Bachelier, Paris.

Clausius, Rudolf (1865). *Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie.* Poggendorffs Annalen der Physik, 125: 353–400.

Maxwell, James Clerk (1860). *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases (Parts I & II).* Philosophical Magazine, 19: 19–32; 20: 21–37.

Boltzmann, Ludwig (1877). *Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Wiener Berichte, 76: 373–435.

Gibbs, J. Willard (1902). *Elementary Principles in Statistical Mechanics.* Charles Scribner's Sons, New York.

Einstein, Albert (1905). *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Annalen der Physik, 17: 549–560.

Bose, Satyendra Nath (1924). *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese.* Zeitschrift für Physik, 26(1): 178–181.

Onsager, Lars (1944). *Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition.* Physical Review, 65(3–4): 117–149.

Landauer, Rolf (1961). *Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process.* IBM Journal of Research and Development, 5(3): 183–191.

Wilson, Kenneth G. (1971). *Renormalization Group and Critical Phenomena (I & II).* Physical Review B, 4(9): 3174–3205.

Prigogine, Ilya (1977). *Self-Organization in Nonequilibrium Systems.* John Wiley & Sons, New York.

Jarzynski, Christopher (1997). *Nonequilibrium Equality for Free Energy Differences.* Physical Review Letters, 78(14): 2690–2693.

Hawking, Stephen W. (1974). *Black hole explosions?.* Nature, 248: 30–31.

Shakil Mahmud • Research Monograph

লেখক পরিচিতি

লেখক পরিচিতি

❖

Shakil Mahmud

গবেষক, লেখক ও সফটওয়্যার প্রকৌশলী

শাকিল মাহমুদ একজন স্বাধীন গবেষক, লেখক ও সফটওয়্যার প্রকৌশলী। তাঁর প্রধান আগ্রহের বিষয় হলো তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞান, গণিতের ইতিহাস, আধুনিক ম্যাক্রোঅর্থনীতি, কম্পিউটিংয়ের বিবর্তন এবং স্থান-কালের দার্শনিক তাৎপর্য। তিনি জটিল দার্শনিক ও বৈজ্ঞানিক ধারণাকে গভীর ও সুললিত ভাষায় উপস্থাপন করতে পছন্দ করেন। তাঁর সার্বিক কাজ পাওয়া যাবে তাঁর ব্যক্তিগত গবেষণা পোর্টাল **shakilmahmud.com** এ।

COLOPHON

Typeset in EB Garamond (English) and Kohinoor Bangla / Noto Serif Bengali (Bengali).
Mathematical typesetting generated with Donald Knuth's TeX algorithms and KaTeX.
Published digitally as a monolithic research monograph by Shakil Mahmud Editorial Series.
Dhaka & Singapore • 2026 • https://shakilmahmud.com