Shakil Mahmud • Research Monograph

SHAKIL MAHMUD EDITORIAL & RESEARCH MONOGRAPHS

জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ

স্থান-কাল, মহাবিশ্ব ও তথ্যের প্রকৃতি উন্মোচনকারী ২০টি অমর গাণিতিক সমীকরণের উৎপত্তি, তাৎপর্য ও মানব সভ্যতার রূপান্তরের এক প্রামাণ্য মহাকাব্য।

SHAKIL MAHMUD

গবেষক ও লেখক

SHAKIL MAHMUD EDITORIAL & RESEARCH SERIES

প্রথম সংকলিত সংস্করণ • ঢাকা ও সিঙ্গাপুর • ২০২৬

জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ

স্থান-কাল, মহাবিশ্ব ও তথ্যের প্রকৃতি উন্মোচনকারী ২০টি অমর গাণিতিক সমীকরণের উৎপত্তি, তাৎপর্য ও মানব সভ্যতার রূপান্তরের এক প্রামাণ্য মহাকাব্য।

LIBRARY & CATALOGING-IN-PUBLICATION DATA

Title: জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ
Author: Shakil Mahmud
Series: Shakil Mahmud Editorial & Research Series (Monograph Collection)
Subjects: Science -- History -- Philosophy -- Mathematics -- Civilization
Published: Dhaka & Singapore, 2026
Format: Digital Monograph Offprint (PDF) • Complete 20-Part Collected Edition
Permanent URI: https://shakilmahmud.com/series/equations/

প্রস্তাবিত সাইটেশন:
Mahmud, Shakil. (2026). *জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ: The Complete 20-Part Collected Monograph*. Shakil Mahmud Research Series. https://shakilmahmud.com/series/equations/

Open Scholarly Access: This collected monograph is published under Open Scholarly Access for personal study, academic citation, university pedagogy, and non-commercial research.

© 2026 Shakil Mahmud. All rights reserved. Typeset and published at Dhaka and Singapore.

Shakil Mahmud • Research Monograph

তাত্ত্বিক ভূমিকা

ভূমিকা: জ্ঞানের একীভূত রূপরেখা

গণিত কেবল মানব মস্তিষ্কের উদ্ভাবিত কোনো সংকেতমালা নয়; এটি হলো ভৌত বাস্তবতার অন্তর্নিহিত মৌলিক ব্যাকরণ। এই মনোগ্রাফে স্থান পেয়েছে এমন ২০টি যুগান্তকারী গাণিতিক সমীকরণ, যা মানব সভ্যতার চিন্তার গতিপথ আমূল বদলে দিয়েছে—খ্রিষ্টপূর্ব ষষ্ঠ শতকের ক্রোটনে পিথাগোরাসের ত্রিভুজ পরিমাপ থেকে শুরু করে কোয়ান্টাম ইভেন্ট হরাইজনে স্টিফেন হকিংয়ের কৃষ্ণগহ্বর তাপগতিবিদ্যা পর্যন্ত। প্রতিটি অধ্যায়ে সমীকরণটির ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট, নির্ভুল গাণিতিক উপপাদন, তাত্ত্বিক সংকট নিরসন এবং আধুনিক প্রযুক্তিতে (জিপিএস, কোয়ান্টাম গণনা ও কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তার এমবেডিং স্পেস) এর প্রত্যক্ষ প্রভাব বিস্তারিতভাবে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

এই গবেষণামূলক কাজের উদ্দেশ্য কেবল তথ্য উপস্থাপন নয়, বরং চিন্তার গভীর বিকাশকে পাঠকের সামনে উন্মোচন করা। প্রতিটি পরিচ্ছদ এক একটি যুগান্তকারী বৌদ্ধিক সংকটের সমাধান হিসেবে কীভাবে আবির্ভূত হয়েছে, তা এখানে পদ্ধতিগতভাবে লিপিবদ্ধ করা হলো।

— Shakil Mahmud
Dhaka & Singapore, 2026

অধ্যায় সূচি

সূচিপত্র

প্রথম পর্যায়: চিরায়ত ভিত্তি ও মেট্রিক জ্যামিতি

খণ্ড ১ — পিথাগোরাসের উপপাদ্য — সমকোণী ত্রিভুজ, মেট্রিক স্পেস এবং অমূলদ সংখ্যার সংকট — 600 শব্দ
পিথাগোরাসের উপপাদ্য — সমকোণী ত্রিভুজ, মেট্রিক স্পেস এবং অমূলদ সংখ্যার সংকট

খণ্ড ২ — ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য — নিউটন, লাইবনিজ এবং অবিচল পরিবর্তনের গণিত — 520 শব্দ
ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য — নিউটন, লাইবনিজ এবং অবিচল পরিবর্তনের গণিত

খণ্ড ৩ — নিউটনের সার্বজনীন মহাকর্ষ সূত্র — মহাজাগতিক কক্ষপথের যান্ত্রিক একীকরণ — 558 শব্দ
নিউটনের সার্বজনীন মহাকর্ষ সূত্র — মহাজাগতিক কক্ষপথের যান্ত্রিক একীকরণ

খণ্ড ৪ — অয়লারের পরিচয় — পাঁচটি মৌলিক ধ্রুবকের অবিচ্ছেদ্য গাণিতিক সমন্বয় — 580 শব্দ
অয়লারের পরিচয় — পাঁচটি মৌলিক ধ্রুবকের অবিচ্ছেদ্য গাণিতিক সমন্বয়

দ্বিতীয় পর্যায়: ক্ষেত্র, তরঙ্গ ও প্রবাহী বলবিদ্যা

খণ্ড ৫ — গাউসীয় পরিমিত বিন্যাস — বেল কার্ভ ও ভুলের বিশ্বজনীন আইন — 747 শব্দ
গাউসীয় পরিমিত বিন্যাস — বেল কার্ভ ও ভুলের বিশ্বজনীন আইন

খণ্ড ৬ — তরঙ্গ সমীকরণ — দালঁবেরের সুর, হারমোনিক্স ও অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্র — 690 শব্দ
তরঙ্গ সমীকরণ — দালঁবেরের সুর, হারমোনিক্স ও অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্র

খণ্ড ৭ — ফুরিয়ার রূপান্তর — মহাবিশ্বকে বিশুদ্ধ সুরের বর্ণালীতে বিভাজন — 559 শব্দ
ফুরিয়ার রূপান্তর — মহাবিশ্বকে বিশুদ্ধ সুরের বর্ণালীতে বিভাজন

খণ্ড ৮ — নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণ — প্রবাহী গতিবিদ্যা, টার্বুলেন্স ও বিশৃঙ্খলার মহাকাব্য — 585 শব্দ
নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণ — প্রবাহী গতিবিদ্যা, টার্বুলেন্স ও বিশৃঙ্খলার মহাকাব্য

তৃতীয় পর্যায়: আপেক্ষিকতা ও কোয়ান্টাম বিপ্লব

খণ্ড ৯ — ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণমালা — বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় একীভবন ও আলোর মহাকাব্য — 538 শব্দ
ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণমালা — বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় একীভবন ও আলোর মহাকাব্য

খণ্ড ১০ — বোলৎজমানের এন্ট্রপি সমীকরণ — পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও কালের তির — 491 শব্দ
বোলৎজমানের এন্ট্রপি সমীকরণ — পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও কালের তির

খণ্ড ১১ — ভর-শক্তি সমতুল্যতা — $E = mc^2$ ও পারমাণবিক শক্তির অগ্নিকুণ্ড — 370 শব্দ
ভর-শক্তি সমতুল্যতা — $E = mc^2$ ও পারমাণবিক শক্তির অগ্নিকুণ্ড

খণ্ড ১২ — আইনস্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণ — স্থান-কালের বক্রতা, জ্যামিতি ও কৃষ্ণগহ্বর — 413 শব্দ
আইনস্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণ — স্থান-কালের বক্রতা, জ্যামিতি ও কৃষ্ণগহ্বর

খণ্ড ১৩ — শ্রোডিঙ্গারের তরঙ্গ সমীকরণ — কোয়ান্টাম সম্ভাব্যতা ও পরমাণুর সুর — 404 শব্দ
শ্রোডিঙ্গারের তরঙ্গ সমীকরণ — কোয়ান্টাম সম্ভাব্যতা ও পরমাণুর সুর

খণ্ড ১৪ — হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি — অনুবন্ধী সীমা ও কোয়ান্টাম শূন্যতা — 409 শব্দ
হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি — অনুবন্ধী সীমা ও কোয়ান্টাম শূন্যতা

খণ্ড ১৫ — ডিরাক সমীকরণ — আপেক্ষিক কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও প্রতিপদার্থের মহাকাব্য — 453 শব্দ
ডিরাক সমীকরণ — আপেক্ষিক কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও প্রতিপদার্থের মহাকাব্য

চতুর্থ পর্যায়: তথ্য, বিশৃঙ্খলা ও মহাজাগতিক দিগন্ত

খণ্ড ১৬ — শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি — বিট, চ্যানেল ধারণক্ষমতা ও ডিজিটাল সভ্যতার ভোর — 426 শব্দ
শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি — বিট, চ্যানেল ধারণক্ষমতা ও ডিজিটাল সভ্যতার ভোর

Shakil Mahmud • Research Monograph

খণ্ড ১৭	**টুরিং কম্পিউটেবিলিটি ও হল্টিং প্রবলেম — যুক্তির অলঙ্ঘনীয় পরম সীমা** *টুরিং কম্পিউটেবিলিটি ও হল্টিং প্রবলেম — যুক্তির অলঙ্ঘনীয় পরম সীমা*	475 শব্দ
খণ্ড ১৮	**লজিস্টিক ম্যাপ ও বিশৃঙ্খলা — পিরিয়ড-ডাবলিং বিভাজন ও বাটারফ্লাই ইফেক্ট** *লজিস্টিক ম্যাপ ও বিশৃঙ্খলা — পিরিয়ড-ডাবলিং বিভাজন ও বাটারফ্লাই ইফেক্ট*	447 শব্দ
খণ্ড ১৯	**বেলের অসমতা ও কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গলমেন্ট — স্থানীয় বাস্তববাদের অবসান** *বেলের অসমতা ও কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গলমেন্ট — স্থানীয় বাস্তববাদের অবসান*	432 শব্দ
খণ্ড ২০	**বেকেনস্টাইন-হকিং এন্ট্রপি — কৃষ্ণগহ্বর ও হলোগ্রাফিক মহাবিশ্ব** *বেকেনস্টাইন-হকিং এন্ট্রপি — কৃষ্ণগহ্বর ও হলোগ্রাফিক মহাবিশ্ব*	556 শব্দ

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • প্রথম খণ্ড

পিথাগোরাসের উপপাদ্য — সমকোণী ত্রিভুজ, মেট্রিক স্পেস এবং অমূলদ সংখ্যার সংকট

পিথাগোরাসের উপপাদ্য — সমকোণী ত্রিভুজ, মেট্রিক স্পেস এবং অমূলদ সংখ্যার সংকট

600 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১: *চিত্র: পার্চমেন্টে আঙ্কিত পিথাগোরাসের জ্যামিতিক প্রমাণ। একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর ওপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কনের মাধ্যমে ($a^2 + b^2 = c^2$) প্রাচীন পিথাগোরীয়রা ইউক্লিডীয় সমতল স্থানের মেট্রিক রূপরেখা এবং অমূলদ সংখ্যার ($sqrt{2}$) সংকট আবিষ্কার করেন।*

খ্রিষ্টপূর্ব ষষ্ঠ শতকে, প্রাচীন গ্রিসের দক্ষিণাঞ্চলীয় ম্যাগনা গ্রেসিয়ার ক্রোটন শহরে একটি কঠোর ও গুপ্ত দার্শনিক সংঘ গড়ে উঠেছিল এক আপসহীন মূলমন্ত্রকে ধারণ করে: *সবকিছুই সংখ্যা (All is Number)*। পিথাগোরাস ও তাঁর শিষ্যদের কাছে পূর্ণসংখ্যা এবং তাদের অনুপাত কেবল মানুষের হিসাবের সরঞ্জাম ছিল না; তা ছিল মহাবিশ্বের এক ঐশ্বরিক সুর—যা তানপুরার তারের কম্পন থেকে শুরু করে আকাশের গ্রহমণ্ডলীয় নৃত্য পর্যন্ত সর্বব্যাপী প্রতিধ্বনিত হয়। কিন্তু সেই দার্শনিক সংঘের ভেতর থেকেই জন্ম নিয়েছিল এমন এক জ্যামিতিক উপপাদ্য, যা একদিকে মানব সভ্যতার স্থানিক দূরত্বের পরিমাপ নির্ধারণ করেছিল এবং অন্যদিকে তাদের সম্পূর্ণ ধর্মতাত্ত্বিক ভিত্তিকে চূর্ণবিচূর্ণ করে দিয়েছিল: পিথাগোরাসের উপপাদ্য।

১. জ্যামিতিক ত্রয়ী এবং দূরত্বের সার্বজনীন মাত্রা

প্রাচীন ব্যাবিলনীয় ভূমি পরিমাপক কিংবা ভারতীয় শুল্বসূত্রের যজ্ঞবেদী নির্মাতারা বহুদিন ধরেই সমকোণী ত্রিভুজের ব্যবহারিক অনুপাত (যেমন ৩-৪-৫ এবং ৫-১২-১৩) জানতেন। কিন্তু গ্রিক চিন্তার বৈপ্লবিক দিকটি ছিল এই সম্পর্ককে ব্যবহারিক মাপজোখ থেকে মুক্ত করে নিখুঁত গাণিতিক প্রমাণের ওপর দাঁড় করানো।

যেকোনো ইউক্লিডীয় সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ও ভূমির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য c হলে, তাদের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলগুলোর সম্পর্ক দাঁড়ায়:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

এটি কেবল একটি সমীকরণ নয়; এটি সমতল **মেট্রিক স্পেসের (Metric Space)** মৌলিক সংজ্ঞা। কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব d সরাসরি পিথাগোরাসের নিয়ম থেকেই নির্ণয় করা হয়:

d = sqrt{(x_2 – x_1)^2 + (y_2 – y_1)^2}

কার্ল ফ্রিডরিশ গাউস ও বের্নহার্ট রিম্যানের ডিফারেনশিয়াল জ্যামিতিতে ত্রিমাত্রিক সমতল স্থানে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র দূরত্বের উপাদান ds এই দ্বিঘাত রূপ ধারণ করে:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

১৯০৮ সালে আলবার্ট আইনস্টাইন ও হেরমান মিনকভস্কি যখন স্থান ও কালকে চতুর্মাত্রিক স্থান-কালে একীভূত করলেন, তখনো পিথাগোরাসের কাঠামো বিলুপ্ত হয়নি—বরং সময়কে বিপরীত চিহ্নে যুক্ত করে বিশেষ আপেক্ষিকতার স্থান-কালিক ব্যবধান নির্ধারণ করল:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

২. হিপ্পাসাসের সংকট এবং মূলদ সংখ্যার মিথ্যার অপনোদন

এই মহৎ উপপাদ্যের ভেতরেই লুকিয়ে ছিল পিথাগোরীয় ধর্মের জন্য এক মারাত্মক বিষবাষ্প। যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য ঠিক ১ একক হয়, তবে তার অতিভুজ c হবে:

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2 implies c = sqrt{2}$$

মেটাপন্টামের তরুণ গণিতবিদ হিপ্পাসাস এই অতিভুজের দৈর্ঘ্যকে দুটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসেবে প্রকাশ করতে চাইলেন: $c = frac{p}{q}$, যেখানে p ও q পরস্পর সহমৌলিক (তাদের কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই)। এক অকাট্য স্ববিরোধী প্রমাণের (Reductio ad absurdum) মাধ্যমে হিপ্পাসাস দেখালেন যে এমন কোনো পূর্ণসংখ্যা সম্ভব নয়:

> *“যদি $sqrt{2} = frac{p}{q}$ হয়, তবে বর্গ করলে পাই $p^2 = 2q^2$। এর অর্থ p^2 অবশ্যই একটি জোড় সংখ্যা, যার ফলে p-কেও জোড় হতে হবে। ধরা যাক $p = 2k$। মান বসিয়ে পাই $(2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$, অর্থাৎ $q^2 = 2k^2$। এর অর্থ q-ও জোড় সংখ্যা। কিন্তু p ও q উভয়ই জোড় হলে তাদের মধ্যে সাধারণ উৎপাদক হিসেবে ২ বিদ্যমান থাকে, যা আমাদের প্রাথমিক অনুমানের (তারা সহমৌলিক) সরাসরি বিরোধী। অতএব, $sqrt{2}$-কে কখনোই দুটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হিসেবে প্রকাশ করা সম্ভব নয়।”*

কিংবদন্তি প্রচলিত আছে যে, এই আবিষ্কারে পিথাগোরীয়রা এতই আতঙ্কিত হয়ে পড়েছিল—কারণ এটি প্রমাণ করেছিল যে মহাবিশ্বে এমন দৈর্ঘ্য রয়েছে যা পূর্ণসংখ্যার ভগ্নাংশ দিয়ে মাপা অসম্ভব—যে হিপ্পাসাসকে সমুদ্রে ডুবিয়ে মৃত্যুদণ্ড দেওয়া হয়েছিল। এই সংকটের সমাধান হতে মানবজাতিকে আরও দুই হাজার বছর অপেক্ষা করতে হয়েছিল রিচার্ড ডেডেকিন্ডের বাস্তব সংখ্যার তত্ত্ব পর্যন্ত।

৩. আধুনিক উত্তরাধিকার: হিলবার্ট স্পেস থেকে মেশিন লার্নিং ভেক্টর

বর্তমান কম্পিউটার বিজ্ঞান ও তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অসীম-মাত্রিক বিমূর্ততায় উন্নীত হয়েছে। একটি হিলবার্ট স্পেসে যখন দুটি ভেক্টর পরস্পরের ওপর লম্ব ($langle u, v rangle = 0$), তখন তাদের দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে:

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

আজকের প্রতিটি বৃহৎ ল্যাঙ্গুয়েজ মডেল (LLM) হাজার হাজার মাত্রার ভেক্টর স্পেসে দুটি শব্দের অর্থগত সাদৃশ্য (Semantic Similarity) গণনা করার সময় পিথাগোরাসের নীতিভিত্তিক কোসাইন সিমিলারিটি ব্যবহার করে:

$$text{CosineSimilarity}(mathbf{u}, mathbf{v}) = frac{mathbf{u} cdot mathbf{v}}{|mathbf{u}||mathbf{v}|}$$

গ্রিসের সমুদ্র সৈকতে বালির ওপর আঁকা সরল রেখা থেকে শুরু করে আজকের কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তার বহুমাত্রিক স্থান—পিথাগোরাসের উপপাদ্য মানুষের স্থানিক চিন্তার অবিসংবাদিত ভিত্তিপ্রস্তর।

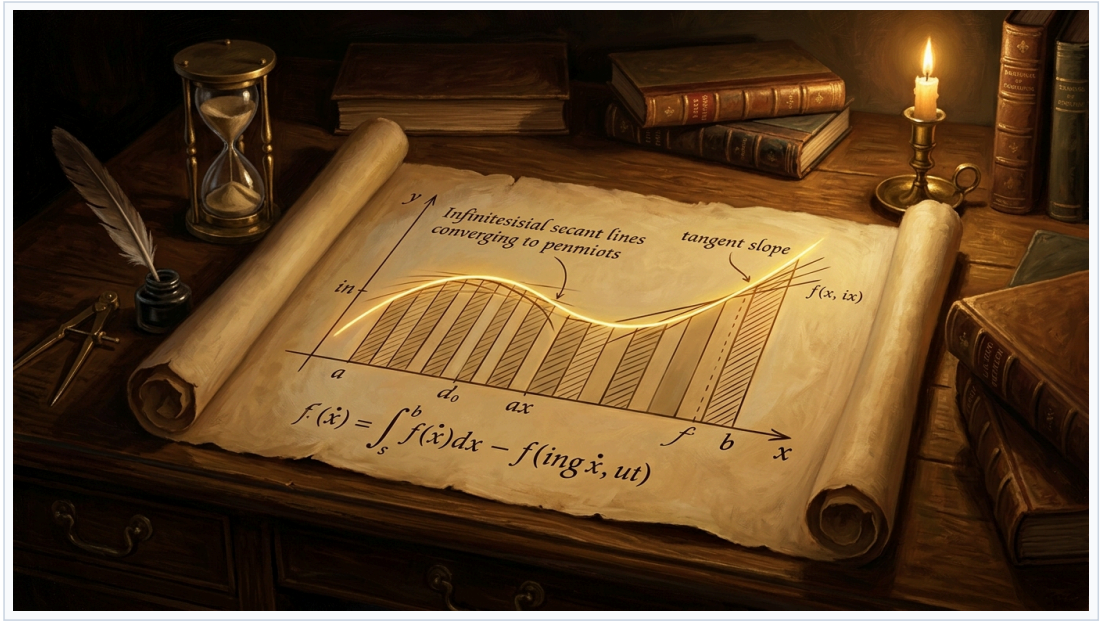
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "পিথাগোরাসের উপপাদ্য — সমকোণী ত্রিভুজ, মেট্রিক স্পেস এবং অমূলদ সংখ্যার সংকট"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-01-pythagorean-theorem-irrationals-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দ্বিতীয় খণ্ড

ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য — নিউটন, লাইবনিজ এবং অবিচল পরিবর্তনের গণিত

ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য — নিউটন, লাইবনিজ এবং অবিচল পরিবর্তনের গণিত

520 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ২: *চিত্র: ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্যের জ্যামিতিক সমন্বয়। বক্ররেখার স্পর্শক ঢাল (অন্তরীকরণ) এবং বক্ররেখার নিচের ক্রমবর্ধমান ক্ষেত্রফল (সমাকলন) যে পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া—তা নিউটন ও লাইবনিজের অবিচল পরিবর্তনের গণিতে উন্মোচিত হয়।*

সপ্তদশ শতাব্দীর মধ্যভাগের আগে পর্যন্ত মানবজাতির গণিত ছিল মূলত স্থবির। প্রাচীন ইউক্লিডীয় জ্যামিতি ও অ্যাপোলোনিয়াসের কনিক চিত্র বৃত্ত, ত্রিভুজ বা উপবৃত্তের স্থির রূপ নিখুঁতভাবে ব্যাখ্যা করতে পারত; কিন্তু বাস্তব মহাবিশ্ব হলো অবিরাম গতির মহাকাব্য—বায়ুর ঘর্ষণে ধেয়ে চলা কামানের গোলার মন্দন, মহাকর্ষের টানে গ্রহের ত্বরণ কিংবা ফুটন্ত পানিতে তাপের সঞ্চালন। প্রায় দুই হাজার বছর ধরে প্রাকৃতিক দর্শনে দুটি সমস্যা সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন রয়ে গিয়েছিল: একটি ছিল বক্ররেখার কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ঢাল বা স্পর্শক নির্ণয়, আর অন্যটি ছিল বক্ররেখার নিচে আবদ্ধ এলাকার ক্ষেত্রফল বের করা। আইজ্যাক নিউটন এবং গটফ্রিড উইলহেম লাইবনিজের অবিস্মরণীয় কীর্তি ছিল এটি প্রমাণ করা যে, এই দুটি ভিন্ন সমস্যা আসলে একই মুদ্রার এপিঠ-ওপিঠ: ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য।

১. দ্বৈত সংকট: স্পর্শক বনাম ক্ষেত্রফল

চিরায়ত জ্যামিতিতে স্পর্শক নির্ণয় ছিল মূলত *অন্তরীকরণের (Differentiation)* সমস্যা: একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর কোনো ক্ষণিক মুহূর্তে পরিবর্তনের হার কত? একটি পড়ন্ত বস্তু যদি $s(t)$ সূত্র মেনে নিচে নামে, তবে শূন্য দিয়ে শূন্যকে ভাগ না করে ঠিক $t = ৩.০$ সেকেন্ডে তার বেগ কত হবে?

অন্যদিকে বক্ররেখার নিচের ক্ষেত্রফল নির্ণয় ছিল *সমাকলনের (Integration)* কাজ। আর্কিমিডিস অধিবৃত্তের ভেতরে অগণিত ক্ষুদ্র বহুভুজ বসিয়ে ক্লান্তিকর "এক্সহশন পদ্ধতিতে" এর সমাধান করতেন। পরবর্তীতে ফের্মা ও দেকার্তে অগ্রগতি আনলেও প্রতিটি নতুন বক্ররেখার জন্য নতুন করে মাথা ঘামাতে হতো।

নিউটন ও লাইবনিজ প্রথম বুঝতে পারেন যে তাৎক্ষণিক পরিবর্তনের হার এবং ক্রমবর্ধমান সমষ্টি পরস্পর বিপরীতমুখী প্রক্রিয়া। গাণিতিক ভাষায়:

$$fracddxleft(int_a^x f(t), dtright) = f(x)$$

int_a^b f(x),dx = F(b) – F(a) quad text{যেখানে } F'(x) = f(x)

এই সূত্রের দ্বিতীয় অংশটি বিজ্ঞানকে এক অপার মুক্তি দিল: যেকোনো অবিচ্ছিন্ন বক্ররেখার নিচের মোট ক্ষেত্রফল পেতে আর অসীমসংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফল যোগ করতে হয় না; কেবল তার অ্যান্টি-ডেরিভেটিভ $F(x)$ বের করে প্রান্তিক বিন্দু দুটিতে মান বসিয়ে বিয়োগ করলেই উত্তর পাওয়া যায়।

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. নিউটনের ফ্লাক্সিয়ন বনাম লাইবনিজের ডিফারেনশিয়াল

১৬৬৫-১৬৬৬ সালে লন্ডনের প্লেগের সময় উলসথর্পের পারিবারিক খামারে নিভৃতবাসে থাকা অবস্থায় তরুণ নিউটন তাঁর “মেথড অব ফ্লাক্সিয়ন” তৈরি করেন। তিনি পরিবর্তনশীল রাশিগুলোকে প্রবাহমান জলধারার মতো দেখতেন এবং তাদের বেগকে চিহ্নিত করতেন অক্ষরের ওপর বিন্দু বসিয়ে ($dotx, doty$)।

এক দশক পরে প্যারিসে স্বাধীনভাবে কাজ করতে গিয়ে জার্মান দার্শনিক লাইবনিজ প্রতীকী যুক্তির দিক থেকে সমস্যাটির সমাধান করেন। লাইবনিজ এমন এক সার্বজনীন নোটেশন তৈরি করলেন যা আজও প্রতিটি বিজ্ঞানের বইয়ে ব্যবহৃত হয়: ল্যাটিন Summa শব্দের আদি অক্ষর থেকে সমাকলন চিহ্ন (int) এবং পার্থক্যের প্রতীক (d):

frac{dy}{dx} = lim_{Delta x to 0} frac{f(x + Delta x) – f(x)}{Delta x}

নিউটন যেখানে মহাকর্ষের ভৌত সমস্যা মেটানোর জন্য ক্যালকুলাস ব্যবহার করেছিলেন, লাইবনিজ জানতেন যে সঠিক প্রতীক চিন্তার গতি বাড়িয়ে দেয়। লাইবনিজের নোটেশনের কারণেই বার্নৌলি পরিবার ও অয়লার ইউরোপজুড়ে গাণিতিক বিশ্লেষণের স্বর্ণযুগ সূচনা করতে পেরেছিলেন।

৩. আধুনিক কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তার চালিকাশক্তি: চেইন রুল ও গ্রেডিয়েন্ট ডিসেন্ট

আজকের যুগে ক্যালকুলাস কেবল রকেট বিজ্ঞান বা কোয়ান্টাম বলবিদ্যার ভাষা নয়; এটি আধুনিক ডিপ লার্নিং ও কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তার মূল হৃৎস্পন্দন।

যেকোনো বৃহৎ নিউরাল নেটওয়ার্ক বা এআই মডেল তার ক্ষতি অপেক্ষক (Loss Function) $mathcal{L}(theta)$ কমানোর মাধ্যমে শেখে। শত শত বিলিয়ন ওজনের গভীর স্তরে ভুলের সংকেত পৌঁছে দেওয়ার জন্য ব্যবহৃত হয় ক্যালকুলাসের বহুমাত্রিক **চেইন রুল (Chain Rule)**:

$$frac{partial mathcal{L}}{partial w_{ij}} = frac{partial mathcal{L}}{partial a_j} cdot frac{partial a_j}{partial z_j} cdot frac{partial z_j}{partial w_{ij}}$$

এবং গ্রেডিয়েন্ট ডিসেন্ট অ্যালগরিদমের মাধ্যমে ধাপে ধাপে মডেলটি অপ্টিমাইজ করা হয়:

theta_{t+1} = theta_t – eta nabla_theta mathcal{L}(theta)

ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য ছাড়া আধুনিক ডিপ লার্নিং, আধুনিক রোবোটিক্স কিংবা আবহাওয়ার পূর্বাভাসের অস্তিত্বই কল্পনা করা যেত না।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ক্যালকুলাসের মৌলিক উপপাদ্য — নিউটন, লাইবনিজ এবং অবিচল পরিবর্তনের গণিত"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ২।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-02-calculus-fundamental-theorem-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • তৃতীয় খণ্ড

নিউটনের সার্বজনীন মহাকর্ষ সূত্র — মহাজাগতিক কক্ষপথের যান্ত্রিক একীকরণ

নিউটনের সার্বজনীন মহাকর্ষ সূত্র — মহাজাগতিক কক্ষপথের যান্ত্রিক একীকরণ

558 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৩: *চিত্র: নিউটনের সার্বজনীন মহাকর্ষ সূত্র ($F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$)। পার্থিব বস্তুর পতন ও গ্রহ-উপগ্রহের উপবৃত্তাকার কক্ষপথ যে অভিন্ন মহাজাগতিক বর্গের ব্যস্তানুপাতিক বলের অধীনে আবদ্ধ — তার একীভূত রূপরেখা।*

হাজার হাজার বছর ধরে মানবজাতির প্রাকৃতিক দার্শনিকরা বাস্তব জগতকে দুটি সম্পূর্ণ পৃথক স্তরে বিভক্ত করে রেখেছিলেন। চাঁদের নিচের পৃথিবী ছিল চার উপাদানের (মাটি, পানি, বায়ু, আগুন) এক অপূর্ণাঙ্গ ও নশ্বর জগত—যেখানে ক্ষয়, ঘর্ষণ ও বিশৃঙ্খলা নিত্যসঙ্গী। আর চাঁদের ওপারের নভোমণ্ডল ছিল অ্যারিস্টটলের পঞ্চম উপাদান বা ইথারে গঠিত এক চিরন্তন স্বর্গ—যেখানে কোনো ক্ষয় নেই, গ্রহ-নক্ষত্ররা ঘর্ষণহীন বৃত্তাকার পথে অবিনশ্বর ছন্দে ঘোরে। ১৬৮৭ সালে প্রকাশিত তাঁর কালজয়ী গ্রন্থ *প্রিন্সিপিয়া ম্যাথমেটিকা*-তে আইজ্যাক নিউটন একটি মাত্র সমীকরণের আঘাতে এই প্রাচীন দ্বিধাবিভক্তিকে চিরতরে ধূলিসাৎ করে দিলেন: সার্বজনীন মহাকর্ষ সূত্র।

১. মহাজাগতিক একীকরণ: আপেল এবং চাঁদ

উলসথর্পের বাগানে বসে নিউটনের মাথায় যে ভাবনাটি এসেছিল, তা কেবল মাটিতে আপেল খসে পড়ার সাধারণ ঘটনা ছিল না; তা ছিল এক দুঃসাহসিক বৈপ্লবিক কল্পনা: *যে শক্তি মাটিতে আপেলকে টেনে নামায়, সেই একই শক্তি কি রাতের আকাশে চাঁদকে পৃথিবীর কক্ষপথে বেঁধে রাখছে না?*

যদি পৃথিবীর কোনো আকর্ষণ না থাকত, তবে জড়তার স্বাভাবিক নিয়মে চাঁদ সরলরৈখিক স্পর্শক বরাবর অসীম মহাশূন্যে ছিটকে চলে যেত। চাঁদকে তার বৃত্তাকার পথে ধরে রাখতে হলে তাকে প্রতি মুহূর্তে সরলরেখা থেকে পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে বিচ্যুত হতে হবে—অর্থাৎ চাঁদও অবিরত পৃথিবীর দিকে “পড়ছে”।

ভূপৃষ্ঠে আপেলের ত্বরণ ($g approx ৯.৮ textm/s^2$) এবং পৃথিবী থেকে ৬০ গুণ দূরত্বের চাঁদের কেন্দ্রমুখী ত্বরণের তুলনা করে নিউটন দেখলেন যে চাঁদের ত্বরণ আপেলের ত্বরণের প্রায় ১/৩৬০০ ভাগ:

$$frac a_textmoon a_textapple approx frac 1 60^2 = frac 1 3600$$

এই নিখুঁত বর্গীয় অনুপাতটি প্রকৃতির গোপন সত্য উন্মোচন করল: মহাকর্ষের প্রভাব দূরত্বের সাথে সরলভাবে কমে না; তা কমে দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতে। মহাবিশ্বের প্রতিটি কণা অপর প্রতিটি কণাকে তাদের ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক বলে আকর্ষণ করে:

$$F = G frac m_1 m_2 r^2$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. কেপলারের সূত্রের প্রথম নীতিভিত্তিক প্রমাণ

ইয়োহানেস কেপলার টাইকো ব্রাহের দশকের পর দশক ধরে সংগৃহীত গ্রহের গতিবিধি বিশ্লেষণ করে তিনটি অভিজ্ঞতাপ্রসূত সূত্র দিয়েছিলেন: গ্রহগুলো সূর্যকে ফোকাসে রেখে উপবৃত্তাকার পথে ঘোরে; সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে; এবং পর্যায়কালের বর্গ দূরত্বের ঘনফলের সমানুপাতিক ($T^2 proptoa^3$)। কিন্তু গ্রহগুলো কেন এমন অদ্ভুত নিয়ম মেনে চলবে, তার কোনো ভৌত বা গাণিতিক ব্যাখ্যা কেপলারের জানা ছিল না।

নিউটন তাঁর সদ্য উদ্ভাবিত ক্যালকুলাসের সাহায্যে প্রমাণ করলেন যে কেপলারের এই নিয়মগুলো কোনো আকস্মিক ঘটনা নয়; বর্গের ব্যস্তানুপাতিক কেন্দ্রীয় বলের অধীনে ঘূর্ণায়মান যেকোনো বস্তুর জন্য উপবৃত্তাকার পথ এক গাণিতিক অনিবার্যতা:

$$fracd^2mathbfrdt^2 = -fracGMr^2hatmathbfr$$

হ্যালির ধূমকেতুর ৭৬ বছর পর পর ফিরে আসার ভবিষ্যদ্বাণী যখন হুবহু মিলে গেল, তখন বিশ্ববাসী মেনে নিল যে ঈশ্বর কোনো অলৌকিক যাদুকর নন—তিনি এক সুনিপুণ গণিতবিদ যিনি মহাবিশ্বকে মহাকর্ষের ঘড়ির কাঁটার মতো শৃঙ্খলিত করেছেন।

৩. শূন্যে দূরবর্তী আকর্ষণ এবং আইনস্টাইনের আগমন

বিপুল সাফল্য সত্ত্বেও এই সূত্রে একটি গভীর দার্শনিক সংকট ছিল, যা নিউটনকেও সারাজীবন পীড়িত করেছিল: *অ্যাকশন অ্যাট আ ডিসটেন্স (Action at a Distance)*। কোনো স্পর্শ বা মাধ্যম ছাড়া সূর্য কীভাবে ১৫ কোটি কিলোমিটার শূন্য মহাশূন্য পেরিয়ে পৃথিবীকে মুহূর্তের মধ্যে আকর্ষণ করতে পারে?

> *“শূন্য মাধ্যমের ভেতর দিয়ে কোনো মধ্যস্থতাকারী উপাদান ছাড়া একটি বস্তু দূর থেকে আরেকটি বস্তুর ওপর বল প্রয়োগ করতে পারে—এই ধারণা আমার কাছে এতটাই অদ্ভুত যে দর্শন বা বিজ্ঞানে যুক্তিসঙ্গত চিন্তাভাবনা করার সক্ষমতা আছে এমন কোনো মানুষ এতে বিশ্বাস করতে পারে বলে আমি মনে করি না। তবে এই বলের কারণ সম্পর্কে আমি কোনো অনুমান দাঁড় করাই না (Hypotheses non fingo)।”*

১৮৪৬ সালে যখন ইউরেনাসের কক্ষপথের সামান্য বিচ্যুতি দেখে গণিতের হিসাব কষে দূরবীন তাকিয়ে ঠিক নির্দিষ্ট স্থানে নেপচুন গ্রহ আবিষ্কৃত হলো, তখন নিউটনের মহিমা তুঙ্গে উঠল। কিন্তু বুধ গ্রহের কক্ষপথের প্রতি শতাব্দীতে ৪৩ আর্কসেকেন্ডের এক সূক্ষ্ম বিচ্যুতি নিউটনের সূত্রে কিছুতেই মিলছিল না। সেই সামান্য ফাটল থেকেই ১৯১৫ সালে আলবার্ট আইনস্টাইন জন্ম দিলেন সাধারণ আপেক্ষিকতার—যেখানে জানা গেল মহাকর্ষ কোনো দূরবর্তী টান নয়, বরং স্থান-কালের বক্রতার ফলাফল।

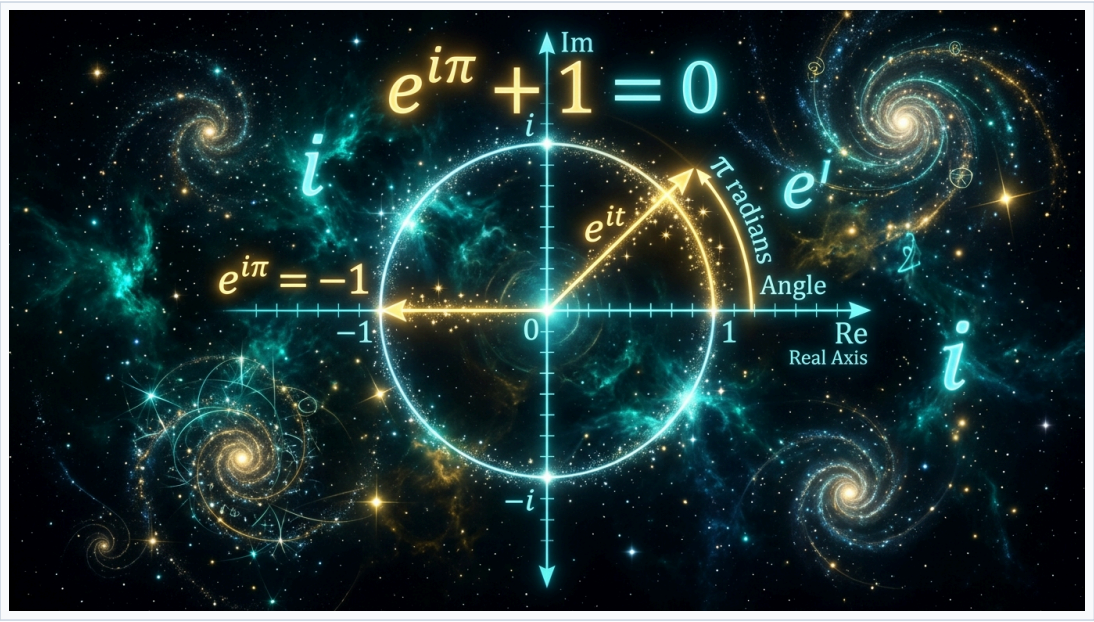
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "নিউটনের সার্বজনীন মহাকর্ষ সূত্র — মহাজাগতিক কক্ষপথের যান্ত্রিক একীকরণ"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ৩।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-03-newton-law-universal-gravitation-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • চতুর্থ খণ্ড

অয়লারের পরিচয় — পাঁচটি মৌলিক ধ্রুবকের অবিচ্ছেদ্য গাণিতিক সমন্বয়

অয়লারের পরিচয় — পাঁচটি মৌলিক ধ্রুবকের অবিচ্ছেদ্য গাণিতিক সমন্বয়

580 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৪: *চিত্র: জটিল সমতলে অয়লারের পরিচয় ($e^{ipi} + 1 = 0$)। জটিল সমতলে pi রেডিয়ান (১৮০^circ) ঘূর্ণনের মাধ্যমে গণিতের পাঁচটি মৌলিক ধ্রুবক (০, ১, pi, e, এবং i) এক অপার্থিব সৌন্দর্যে একীভূত হয়েছে।*

গণিতে সৌন্দর্য কোনো অলঙ্কার নয়; তা হলো আপাতদৃষ্টিতে সম্পূর্ণ ভিন্ন জগতের গাণিতিক ধারণাসমূহের মধ্যে এক অবিশ্বাস্য ঐক্যের প্রকাশ। ১৭৪৮ সালে যখন কিংবদন্তি সুইস গণিতবিদ লিওনহার্ড অয়লার তাঁর কালজয়ী গ্রন্থ *ইন্ট্রোডাকশিও ইন অ্যানালাইসিন ইনফিনিটোরাম* প্রকাশ করেন, তখন তিনি মানবজাতিকে এমন এক সমীকরণ উপহার দিয়েছিলেন যা শত শত বছর ধরে গণিতবিদ ও পদার্থবিদদের স্তব্ধ করে রেখেছে। নোবেলজয়ী পদার্থবিদ রিচার্ড ফাইনম্যান একে অভিহিত করেছিলেন “আমাদের মুকুটের সেরা রত্ন এবং সমগ্র গণিতের সবচেয়ে স্মরণীয় সূত্র” হিসেবে। মাত্র একটি ছোট লাইনে এটি মানুষের গাণিতিক চিন্তার পাঁচটি পরম মৌলিক ধ্রুবক—শূন্য, এক, পাই, ই এবং কাল্পনিক সংখ্যা আই-কে যোগ, গুণ ও ঘাতের সাহায্যে এক অপার্থিব সৌন্দর্যে বেঁধে ফেলে:

$$e^{ipi} + 1 = 0$$

১. পাঁচটি মৌলিক মহাজাগতিক ধ্রুবকের সমাবেশ

এই সমীকরণটি কেন এত রোমাঞ্চকর, তা বুঝতে হলে এর প্রতিটি উপাদানের ঐতিহাসিক পটভূমির দিকে তাকাতে হবে:

- ০ **(যোগের অনন্য উপাদান):** শূন্যতার প্রতীক, যা প্রাচীন ভারতীয় গণিতবিদ ব্রহ্মগুপ্তের হাতে পূর্ণতা পেয়েছিল এবং যার উপস্থিতি ছাড়া কোনো স্থানাঙ্ক বা ভিত্তি সম্ভব নয়।
- ১ **(গুণের অনন্য উপাদান):** গণনার আদি পরমাণু, সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সূচনা বিন্দু।
- $piapprox৩.১৪১৫৯dots$ **(বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত):** প্রাচীন ইউক্লিডীয় জ্যামিতি থেকে উদ্ভূত অমূলদ সংখ্যা, যা স্থান ও বক্রতার অবিচ্ছেদ্য সীমানা।
- $eapprox২.৭১৮২৮dots$ **(অবিচ্ছিন্ন বৃদ্ধির ভিত্তি):** প্রাকৃতিক লগারিদমের ভিত্তি, যা চক্রবৃদ্ধি সুদ ও ক্যালকুলাসের গর্ভ থেকে জন্ম নিয়েছে—একমাত্র ভিত্তি যার সূচকীয় অপেক্ষক নিজের অন্তরকের সমান: $fracddxe^x = e^x$।
- $i = sqrt{-১}$ **(কাল্পনিক একক):** ঋণাত্মক একের বর্গমূল, যাকে একসময় রনে দেকার্তে “অবাস্তব” বলে উড়িয়ে দিয়েছিলেন, অথচ যা দ্বিমাত্রিক জটিল সমতলের দরজা খুলে দেয়।

এই পাঁচটি সংখ্যা আবিষ্কৃত হয়েছিল শত শত বছরের ব্যবধানে, ভিন্ন ভিন্ন দেশে, সম্পূর্ণ ভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে। তারা যে কোনো অতিরিক্ত সহগ বা অবশিষ্ট ভগ্নাংশ ছাড়া এমন এক নিখুঁত সম্পর্কে এসে মিলবে—তা যেন মহাবিশ্বের এক গভীরতম গোপন রহস্যের উন্মোচন।

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. টেইলর ধারা এবং অয়লারের সূত্র

সূচকীয় অবিচ্ছিন্ন বৃদ্ধি (e^x) এবং পর্যায়বৃত্ত ত্রিকোণমিতিক তরঙ্গের ($cosx, sinx$) মধ্যে সংযোগ সেতুটি তৈরি হয়েছিল অসীম টেইলর ধারার মাধ্যমে:

$$e^x = 1 + x + fracx^22! + fracx^33! + fracx^44! + dots$$

cos x = 1 – frac{x^2}{2!} + frac{x^4}{4!} – dots

sin x = x – frac{x^3}{3!} + frac{x^5}{5!} – dots

অয়লার এক দুঃসাহসিক সিদ্ধান্ত নিয়ে সূচকীয় ধারায় বাস্তব x-এর পরিবর্তে কাল্পনিক রাশি ix বসিয়ে দিলেন। যেহেতু $i^2 = -১, i^3 = -i, i^4 = ১, i^5 = i$:

e^{ix} = 1 + ix – frac{x^2}{2!} – ifrac{x^3}{3!} + frac{x^4}{4!} + ifrac{x^5}{5!} – dots

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ আলাদা করতেই জন্ম নিল অমর **অয়লারের সূত্র**:

$$e^{ix} = cosx + isinx$$

এবার এই সমীকরণে কোণ হিসেবে $x = pi$ রেডিয়ান (১৮০$^c irc$) বসালেই ঘটে সেই ম্যাজিক:

$$e^{ipi} = cospi + isinpi = -1 + i(0) = -1$$

উভয় পক্ষে ১ যোগ করলেই আমরা পাই সেই অমর কবিতা:

$$e^{ipi} + 1 = 0$$

৩. জটিল সমতলে ঘূর্ণন এবং আধুনিক কোয়ান্টাম বাস্তবতা

জটিল সমতলে যেকোনো সংখ্যাকে e^{itheta} দিয়ে গুণ করার অর্থ হলো সেই ভেক্টরটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে $theta$ কোণে ঘুরিয়ে দেওয়া। যখন $theta = pi$, তখন ধনাত্মক বাস্তব অক্ষের একটি রেখা সোজা ১৮০ ডিগ্রি ঘুরে ঠিক -১-এ গিয়ে পৌঁছায়।

এই ঘূর্ণন কেবল গণিতের খেলা নয়; এটি বাস্তব পদার্থবিজ্ঞানের মূল ইঞ্জিন:

- **কোয়ান্টাম বলবিদ্যা:** প্রতিটি কোয়ান্টাম তরঙ্গ ফাংশন সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় এই জটিল ঘূর্ণনের মাধ্যমে: $psi(t) = psi(0)e^{-iEt/hbar}$। দ্বি-চির পরীক্ষায় কণার ব্যতিচার সরাসরি এই জটিল দশার ঘূর্ণন থেকেই সৃষ্টি হয়।
- **তড়িৎ প্রকৌশল ও সংকেত প্রক্রিয়াকরণ:** অল্টারনেটিং কারেন্ট (AC), তড়িৎ-চৌম্বকীয় তরঙ্গ এবং ফাস্ট ফুরিয়ার ট্রান্সফর্ম (FFT)-এ জটিল সূচকীয় রূপান্তর ছাড়া আধুনিক ওয়্যারলেস যোগাযোগ ও ডিজিটাল অডিও তৈরি করাই অসম্ভব ছিল।

অয়লারের পরিচয় আমাদের স্মরণ করিয়ে দেয় যে, প্রকৃতির আপাত বিশৃঙ্খলার গভীরে প্রোথিত রয়েছে এক পরম গাণিতিক শৃঙ্খলা ও শ্বাসরুদ্ধকর সৌন্দর্য।

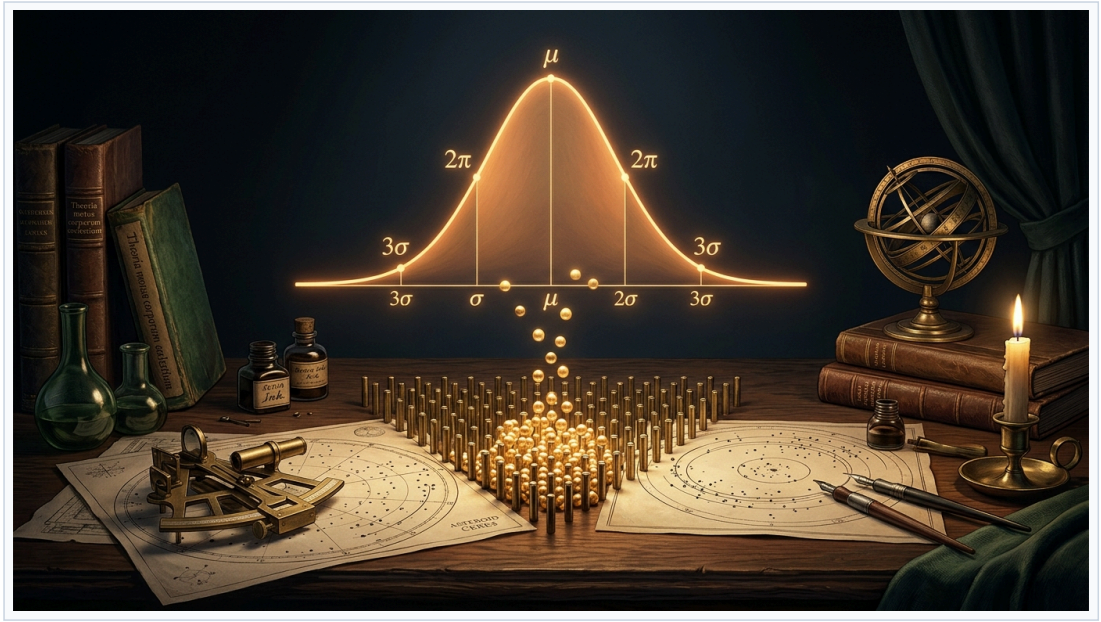
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "অয়লারের পরিচয় — পাঁচটি মৌলিক ধ্রুবকের অবিচ্ছেদ্য গাণিতিক সমন্বয়"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ৪। https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-04-euler-identity-complex-plane-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • পঞ্চম খণ্ড

গাউসীয় পরিমিত বিন্যাস — বেল কার্ভ ও ভুলের বিশ্বজনীন আইন

গাউসীয় পরিমিত বিন্যাস — বেল কার্ভ ও ভুলের বিশ্বজনীন আইন

747 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৫: *চিত্র: গাউসীয় পরিমিত বিন্যাস বা বেল কার্ভ ($f(x) = frac{1}{sigmasqrt{2pi}} e^{-frac{(x-mu)^2}{2sigma^2}}$)। কার্ল ফ্রিডরিশ গাউসের মহাজাগতিক পরিমাপের ভুল তত্ত্ব ও কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য দেখায় কীভাবে অগণিত বিশৃঙ্খল আণুবীক্ষণিক বিচ্যুতি এক নিখুঁত সার্বজনীন ঘণ্টা-বক্ররেখায় রূপ নেয়।*

১৮০১ সালের ১ জানুয়ারি ইতালীয় জ্যোতির্বিজ্ঞানী জুসেপ্পে পিয়াজ্জি বৃষ রাশিমণ্ডলে এক অচেনা, আবছা আলোর বিন্দুর গতিবিধি পর্যবেক্ষণ করেন। এটি ছিল মানব ইতিহাসের আবিষ্কৃত প্রথম গ্রহাণু—'সেরিস' (Ceres)। কিন্তু মাত্র ৪০ দিন পর সূর্যালোকে ঢাকা পড়ে সেরিস নিখোঁজ হয়ে যায়। সেই যুগে দূরবীক্ষণ যন্ত্রের সীমিত ও ত্রুটিপূর্ণ পর্যবেক্ষণ থেকে নিখোঁজ গ্রহাণুর কক্ষপথ নির্ণয় করা জ্যোতির্বিজ্ঞানীদের কাছে অসম্ভব ঠেকছিল। ঠিক তখনই দৃশ্যপটে আসেন ২৪ বছর বয়সী জার্মান গণিতবিদ কার্ল ফ্রিডরিশ গাউস। ত্রুটি তত্ত্ব (Theory of Errors) এবং একটি অদ্ভুত ঘণ্টা-আকৃতির সমীকরণ ব্যবহার করে গাউস সেরিসের হারিয়ে যাওয়া কক্ষপথ এমন অভ্রান্তভাবে গণনা করেন যে, জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা দূরবীক্ষণ ঘুরিয়ে মাত্র এক ডিগ্রির ভগ্নাংশের মধ্যে সেরিসকে পুনরায় খুঁজে পান। গাউসের সেই অবিস্মরণীয় বিজয়ের কেন্দ্রবিন্দু ছিল গণিতের সবচেয়ে প্রভাবশালী সমীকরণ: **পরিমিত বা গাউসীয় বিন্যাস (Normal Distribution)**—যা বিশৃঙ্খলার ভেতর থেকে মহাজাগতিক শৃঙ্খলার জন্ম দেয়।

১. সমীকরণের শরীরতত্ত্ব: বেল কার্ভের রূপরেখা

কোনো অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক $Xsimmathcal{N}(mu, sigma^2)$-এর সম্ভাব্যতা ঘনত্ব অপেক্ষক (Probability Density Function বা PDF) বাস্তব সংখ্যার সমগ্র সীমার মধ্যে $(-infty, infty)$ নিম্নোক্ত অমর সমীকরণের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত হয়:

f(x) = frac{1}{sigma sqrt{2pi}} expleft(-frac{(x – mu)^2}{2sigma^2} right)

এই সমীকরণের প্রতিটি গাণিতিক পদ ও ধ্রুবক প্রকৃতি, জ্যামিতি ও সম্ভাবনার এক গভীর সংহতি প্রকাশ করে:

- x **(অবিচ্ছিন্ন চলক):** বাস্তব অক্ষের ওপর যেকোনো পরীক্ষামূলক পর্যবেক্ষণ, পরিমাপের বিচ্যুতি বা সংকেতের মান।
- mu **(গড় বা অবস্থান পরামিতি):** বিন্যাসের ভরকেন্দ্র বা প্রত্যাশিত মান ($mathbbE[X] = mu$)। ঘণ্টা-আকৃতির প্রতিসম বক্ররেখাটির সর্বোচ্চ চূড়া অবস্থান করে ঠিক $x = mu$ বিন্দুতে, যেখানে প্রথম অন্তরক শূন্য হয়: $f'(mu) = 0$।
- $sigma$ **(পরিমিত ব্যবধান বা স্কেল পরামিতি):** উপাত্তের বিস্তৃতি বা ছড়ানোর পরিমাপ। বক্ররেখাটির বাঁক পরিবর্তনের বিন্দুগুলো (Inflection Points)—যেখানে বক্রতা নিচের দিক থেকে ওপরের দিকে মোড় নেয়—অবস্থান করে ঠিক $x = mupmsigma$ বিন্দুতে, যেখানে দ্বিতীয় অন্তরক শূন্য: f”(mu pm sigma) = 0।
- **সূচকীয় অংশ** $expleft(-frac(x-mu)^2 2sigma^2 right)$**:** সম্ভাবনা কীভাবে হ্রাস পায় তা নির্ধারণ করে। গড় থেকে দূরত্বের বর্গের কারণে চরম বিচ্যুতি বা এক্সট্রিম আউটলায়ারগুলোর সম্ভাবনা অতি-সূচকীয় হারে প্রায় শূন্যে নেমে আসে।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- **প্রমিতকরণ গুণক** $frac1sigmasqrt2pi$: নিশ্চিত করে যে সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফলের সমষ্টি বা ইন্টিগ্রাল সর্বদা ঠিক ১ হবে: $int^i_{-infty}nftyf(x),dx=1$। সম্ভাবনার একটি সূত্রে বৃত্তের জ্যামিতিক ধ্রুবক pi-এর আবির্ভাব দ্বি-মাত্রিক ইউক্লিডীয় স্থানের ঘূর্ণন প্রতিসাম্যের এক অপার্থিব নিদর্শন।

২. গাউসীয় সমাকলন: সম্ভাবনার ভেতর pi কেন আসে?

বিশ্লেষণের অন্যতম জাদুকরী প্রশ্ন হলো: একটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত pi, মানুষের উচ্চতা কিংবা নক্ষত্রের পরিমাপ ত্রুটির সূত্রে কীভাবে প্রবেশ করল? এর উত্তর লুকিয়ে রয়েছে সিমিয়ন দেনি পোয়াসোঁর আবিষ্কৃত দ্বৈত সমাকলন পদ্ধতিতে।

মৌলিক গাউসীয় সমাকলনটি হলো $I=int^i_{-infty}nftye^{-x^2}dx$। ফাংশন e^{-x^2}-এর কোনো সাধারণ বীজগণিতীয় প্রতি-অন্তরক নেই। তাই আমরা এই ইন্টিগ্রালটির বর্গ নিয়ে কার্তেসীয় দ্বি-মাত্রিক তলে বিবেচনা করি:

$$I^2=left(int^i_{-infty}nftye^{-x^2}dxright)left(int^i_{-infty}nftye^{-y^2}dyright)=int^i_{-infty}nftyint^i_{-infty}nftye^{-(x^2+y^2)},dx,dy$$

যেহেতু রাশিটি $e^{-(x^2+y^2)}=e^{-r^2}$ গোলকীয় বা কেন্দ্রমুখীভাবে প্রতিসম, তাই কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x,y) থেকে পোলার স্থানাঙ্ক $(r,theta)$-এ রূপান্তর করলে ক্ষেত্রফল উপাদান হয় $dx,dy=r,dr,dtheta$:

$$I^2=int_0^{2pi}dthetaint_0^inftyre^{-r^2},dr$$

কৌণিক ইন্টিগ্রালটি একটি পূর্ণ বৃত্তীয় ঘূর্ণন সম্পন্ন করে: $int_0^{2pi}dtheta=2pi$। আর ব্যাসার্ধীয় ইন্টিগ্রালটি প্রতিস্থাপন পদ্ধতি $u=r^2$ $(du=2r,dr)$ দ্বারা সরাসরি সমাধানযোগ্য:

int_0^infty r e^{-r^2} dr = frac{1}{2} int_0^infty e^{-u} du = frac{1}{2} left[-e^{-u} right]_0^infty = frac{1}{2}(0 – (-1)) = frac{1}{2}

অতএব, $I^2=2picdotfrac12=pi$, যা প্রমাণ করে:

$$I=int^i_{-infty}nftye^{-x^2}dx=sqrtpi$$

দুটি স্বাধীন ত্রুটির অক্ষের ঘূর্ণন প্রতিসাম্যই হলো সম্ভাবনার সূত্রের হৃদয়ে pi-এর উপস্থিতির গভীর কারণ।

৩. কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য (Central Limit Theorem)

কেন প্রকৃতিতে সর্বত্র নরমাল ডিস্ট্রিবিউশন দৃশ্যমান? এর উত্তর দেয় ১৮১০ সালে পিয়েরে-সাইমন ল্যাপ্লাস কর্তৃক প্রণীত **কেন্দ্রীয় সীমা উপপাদ্য (CLT)**।

উপপাদ্যটি বলে: যদি কোনো ব্যবস্থা থেকে স্বাধীন ও সমভাবে বণ্টিত (i.i.d.) দৈব চলক $X_1,X_2,dots,X_n$ সংগ্রহ করা হয় যাদের সসীম গড় mu ও সসীম ভেদমান $sigma^2$ রয়েছে, তবে চলকগুলোর মূল বিন্যাস যেমনই হোক না কেন—তাদের নমুনার গড় $ntoinfty$ হলে একটি আদর্শ পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়:

Z_n = frac{sum_{i=1}^n X_i – nmu}{sigma sqrt{n}} xrightarrow{d} mathcal{N}(0, 1)

এটি প্রকৃতির পরম পরিসংখ্যানিক আকর্ষণ বিন্দু। যখন কোনো ম্যাক্রোস্কোপিক ঘটনা হাজার হাজার ক্ষুদ্র আণুবীক্ষণিক এলোমেলো প্রভাবের সমাহার—তখন তাদের ব্যক্তিগত বিশৃঙ্খলা মিলিয়ে গিয়ে জন্ম নেয় নিখুঁত ঘণ্টার মতো সমমিত বক্ররেখা।

৪. আধুনিক বিজ্ঞান ও প্রযুক্তিতে প্রয়োগ

- **পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও তাপমাত্রা:** জেমস ক্লার্ক ম্যাক্সওয়েল আদর্শ গ্যাসের অণুর দ্রুতির বিন্যাস ব্যাখ্যায় গাউসীয় বিন্যাস প্রয়োগ করেন। মূলত কোনো গ্যাসের তাপমাত্রা হলো তার অণুগুলোর গাউসীয় বেগ বিচ্যুতির সমষ্টিগত ভেদমান।
- **কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তা ও ডিপ লার্নিং:** ডিপ নিউরাল নেটওয়ার্কের প্রাথমিক ওজন ম্যাট্রিক্স তৈরিতে গাউসীয় ইনিশিয়ালাইজেশন (Xavier/He initialization) ব্যবহৃত হয় যাতে গ্রেডিয়েন্ট এক্সপ্লোশন বা ভ্যানিশিং প্রতিহত করা যায়।
- **কোয়ান্টাম ও আর্থিক প্রকৌশল:** ব্ল্যাক-স্কোলস মডেলে শেয়ার বাজারের মূল্য পরিভ্রমণ এবং ব্রাউনিয়ান গতি গাউসীয় প্রক্রিয়া হিসেবে মডেল করা হয়।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "গাউসীয় পরিমিত বিন্যাস — বেল কার্ভ ও ভুলের বিশ্বজনীন আইন"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ৫। https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-05-normal-distribution-bell-curve-bn/

Shakil Mahmud • Research Monograph

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ষষ্ঠ খণ্ড

তরঙ্গ সমীকরণ — দালঁবেরের সুর, হারমোনিক্স ও অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্র

তরঙ্গ সমীকরণ — দালঁবেরের সুর, হারমোনিক্স ও অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্র

690 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৬: *চিত্র: জঁ ল্য রোঁ দালঁবেরের তরঙ্গ সমীকরণ ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u$)। স্থান ও কালের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত গতিশীল সাইন তরঙ্গ এবং তানপুরা বা বাদ্যযন্ত্রের তারের কম্পন আংশিক ব্যবকলনীয় সমীকরণের অবিচ্ছিন্ন তরঙ্গে একীভূত হয়।*

একটি বেহালা বা তানপুরার তারে আঙুল দিয়ে মৃদু টান দিন। টানটান তারের ওপর দিয়ে চোখের পলকে একটি অদৃশ্য কম্পন ছুটে যাবে এবং বাতাসের ঘন-লঘু স্তরের মধ্য দিয়ে আপনার কানে মধুর সুর হিসেবে ধরা দেবে। ১৭৪৬ সালে ফরাসি বহুবিদ্যাবিশারদ জঁ ল্য রোঁ দালঁবের (Jean le Rond d'Alembert) এক মৌলিক প্রশ্ন তুললেন: *একটি কম্পমান তার ঠিক কোন সুনির্দিষ্ট গাণিতিক নিয়ম মেনে চলে?* তার অনুসন্ধানের মধ্য দিয়েই মানব ইতিহাসের প্রথম আংশিক ব্যবকলনীয় সমীকরণ (Partial Differential Equation) জন্ম নেয়: **তরঙ্গ সমীকরণ (The Wave Equation)**। বাদ্যযন্ত্রের তার, সাগরের সুনামি, ভূকম্পন তরঙ্গ থেকে শুরু করে অপটিক্যাল ফাইবারের আলোক তরঙ্গ এবং কোয়ান্টাম কণার তরঙ্গরূপ—সমগ্র মহাবিশ্ব মূলত দালঁবেরের এই সমীকরণের ছন্দে নৃত্যরত।

১. সমীকরণের পরিচয়: কালের ত্বরণ ও স্থানের বক্রতার মিলন

এক-মাত্রিক স্থানে চিরায়ত তরঙ্গ সমীকরণটি কোনো তরঙ্গের সরণ ফিল্ড $u(x,t)$-এর সময়ের সাপেক্ষে দ্বিতীয় অন্তরককে স্থানের সাপেক্ষে দ্বিতীয় অন্তরকের সাথে সম্পর্কিত করে:

$$fracpartial^2upartialt^2 = v^2 fracpartial^2upartialx^2$$

ত্রি-মাত্রিক স্থানে সমীকরণটি ল্যাপ্লাসিয়ান অপারেটর $nabla^2 = fracpartial^2partialx^2 + fracpartial^2partialy^2 + fracpartial^2partialz^2$ গ্রহণের মাধ্যমে সার্বজনীন রূপ ধারণ করে:

$$fracpartial^2upartialt^2 = v^2 nabla^2 u$$

এই সংক্ষিপ্ত সমীকরণটি একটি বিস্ময়কর প্রাকৃতিক সত্য প্রকাশ করে: **সময়ের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর ত্বরণ তার নিকটবর্তী পরিবেশের স্থানিক বক্রতার সমানুপাতিক**।

- $u(mathbfx, t)$ **(সরণ ক্ষেত্র):** t সময়ে $mathbfx$ স্থানে তরঙ্গের বিস্তার। তারের ক্ষেত্রে এটি উলম্ব সরণ; শব্দের ক্ষেত্রে বাতাসের চাপের বিচ্যুতি $Deltap$; আলোর ক্ষেত্রে তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্রের মান $mathbfE$ ও $mathbfB$।
- $fracpartial^2upartialt^2$ **(সময়ের সাপেক্ষে ত্বরণ):** কোনো বিন্দু কত দ্রুত কাঁপছে এবং তার গতির পরিবর্তনের হার।

- $nabla^2 u$ **(স্থানিক বক্রতা বা ল্যাপ্লাসিয়ান):** নির্দেশ করে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু তার চারপাশের প্রতিবেশীদের গড় মানের চেয়ে কতটা উঁচুতে বা নিচুতে রয়েছে। তারের কোনো চূড়ায় বক্রতা ঋণাত্মক হওয়ায় প্রত্যয়নী বল তাকে নিচের দিকে ত্বরণ দেয়।
- v **(তরঙ্গের গতিবেগ):** মাধ্যমের মধ্য দিয়ে তরঙ্গের শক্তি স্থানান্তরের সসীম গতিবেগ: টানটান তারের ক্ষেত্রে $v = sqrtT/mu$ (যেখানে T হলো টান এবং mu হলো একক দৈর্ঘ্যের ভর)।

২. নিউটনের গতিসূত্র থেকে সমীকরণটির প্রতিপাদন

দালঁবের কীভাবে এই সম্পর্কে পৌঁছান তা বুঝতে একটি টানটান তারের অতি-ক্ষুদ্র অংশ dx বিবেচনা করি (x থেকে $x + dx$ পর্যন্ত), যার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর mu এবং টান T। এই ক্ষুদ্র অংশের ভর $dm = mu, dx$।

বাম প্রান্ত x-এ টান কাজ করে কোণ $theta_1$-এ, এবং ডান প্রান্ত $x + dx$-এ কোণ $theta_2$-এ। ক্ষুদ্র বিস্তারের জন্য খাড়া বলের উপাংশগুলো হলো:

$$F_y(x) = -Tsintheta_1approx - Tleft.fracpartialupartialxright|_x$$

$$F_y(x + dx) = Tsintheta_2approxTleft.fracpartialupartialxright|_{x+dx}$$

অতএব, এই ক্ষুদ্র অংশের ওপর প্রযুক্ত মোট উলম্ব বল dF_y হলো দুই প্রান্তের টানের বিয়োগফল:

dF_y = T left(left. frac{partial u}{partial x} right|_{x + dx} – left. frac{partial u}{partial x} right|_x right) = T frac{partial^2 u}{partial x^2} dx

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে, প্রযুক্ত বল = ভর $times$ ত্বরণ ($dF_y = (mu, dx)fracpartial^2upartialt^2$):

$$Tfracpartial^2upartialx^2dx = mudxfracpartial^2upartialt^2$$

উভয় পাশ থেকে ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য dx বর্জন করে এবং তরঙ্গের গতিবেগ $v = sqrtT/mu$ বসালে পাওয়া যায় অমর এক-মাত্রিক তরঙ্গ সমীকরণ:

$$fracpartial^2upartialt^2 = v^2fracpartial^2upartialx^2$$

৩. দালঁবেরের গতিশীল তরঙ্গ সমাধান

দালঁবের এই সমীকরণটি সমাধানের জন্য দুটি নতুন চলক ব্যবহার করেন: xi = x – vt এবং $eta = x + vt$। এর মাধ্যমে সমীকরণটি একটি অতি সহজ রূপে রূপান্তরিত হয়:

$$fracpartial^2upartialxipartialeta = 0$$

এর সাধারণ সমাধান হলো:

u(x, t) = f(x – vt) + g(x + vt)

এর গভীর তাৎপর্য হলো: মহাবিশ্বের যেকোনো তরঙ্গ মূলত দুটি বিপরীতমুখী স্বাধীন তরঙ্গের সমষ্টি। f(x – vt) রূপান্তরহীনভাবে ডানদিকে v গতিবেগে ছুটে চলা তরঙ্গ, আর $g(x + vt)$ বামদিকে ধাবমান তরঙ্গ। এরা যখন সীমাবদ্ধ সীমানায় প্রতিফলিত হয়, তখন তৈরি হয় সুসংগত স্থির তরঙ্গ (Standing Wave), যার ফলে গিটার বা সেতারের সুর সৃষ্টি হয়।

৪. ম্যাক্সওয়েল, আলোকবিজ্ঞান ও কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় তরঙ্গ

- **ম্যাক্সওয়েলের বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় তরঙ্গ:** ১৮৬৫ সালে জেমস ক্লার্ক ম্যাক্সওয়েল দেখান যে তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র শূন্য মাধ্যমে দালঁবেরের ত্রি-মাত্রিক তরঙ্গ সমীকরণ মেনে চলে: $nabla^2mathbfE = frac1c^2fracpartial^2mathbfEpartialt^2$। এখান থেকেই প্রমাণিত হয় যে আলো মূলত এক প্রকার বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় তরঙ্গ।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- **ভূকম্পনবিদ্যা (Seismology):** ভূমিকম্পের সময় পৃথিবীর ভূত্বক দিয়ে প্রাইমারি (P) এবং সেকেন্ডারি (S) তরঙ্গ প্রবাহিত হয়, যার গতিবেগ পরিমাপ করে বিজ্ঞানীরা পৃথিবীর তরল বহিস্থ কোরের সন্ধান পান।
- **শ্রোডিঙ্গারের কোয়ান্টাম বলবিদ্যা:** ১৯২৬ সালে এরভিন শ্রোডিঙ্গারের তরঙ্গ সমীকরণ মূলত কোয়ান্টাম কণার সম্ভাব্যতা তরঙ্গের ব্যবকলনীয় রূপ।



সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "তরঙ্গ সমীকরণ — দালঁবেরের সুর, হারমোনিক্স ও অবিচ্ছিন্ন ক্ষেত্র"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ৬। https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-06-wave-equation-dalembert-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • সপ্তম খণ্ড

ফুরিয়ার রূপান্তর — মহাবিশ্বকে বিশুদ্ধ সুরের বর্ণালীতে বিভাজন

ফুরিয়ার রূপান্তর — মহাবিশ্বকে বিশুদ্ধ সুরের বর্ণালীতে বিভাজন

559 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৭: *চিত্র: ফুরিয়ার রূপান্তর ($\hat{f}(xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x xi} dx$)। জোসেফ ফুরিয়ারের অবিস্মরণীয় উপলব্ধি: মহাবিশ্বের যেকোনো জটিল সংকেত বা তাপীয় প্রবাহকে বিশুদ্ধ সাইন ও কোসাইন কম্পাঙ্কের অনন্ত ঐকতানে বিভক্ত করা সম্ভব।*

১৮০৭ সালে ফরাসি গণিতবিদ ও নেপোলিয়নের প্রিফেক্ট জঁ-বাপতিস্ত জোসেফ ফুরিয়ার (Jean-Baptiste Joseph Fourier) প্যারিসের অ্যাকাডেমি অব সায়েন্সেসে একটি গবেষণাপত্র উপস্থাপন করেন যা তৎকালীন বিজ্ঞান সমাজে চরম বিস্ময় ও বিতর্কের জন্ম দেয়। ফুরিয়ার দাবি করেন: *মহাবিশ্বের যেকোনো গাণিতিক সংকেত বা অপেক্ষক—তা যতই অমসৃণ, অসদৃশ কিংবা বিচ্ছিন্ন হোক না কেন—তাকে বিশুদ্ধ সাইন ও কোসাইন তরঙ্গের অনন্ত সমষ্টি হিসেবে প্রকাশ করা সম্ভব।* তৎকালীন পরাক্রমশালী গণিতবিদ জোসেফ-লুই লাগ্রাঞ্জ এবং পিয়েরে-সাইমন ল্যাপ্লাস এই ধারণাকে অসম্ভব বলে প্রত্যাখ্যান করেছিলেন। কিন্তু ইতিহাস প্রমাণ করেছে ফুরিয়ারই সঠিক ছিলেন। আজকের যুগে **ফুরিয়ার রূপান্তর (The Fourier Transform)** হলো ডিজিটাল সভ্যতার মূল ভিত্তি: এই সমীকরণ ছাড়া আজকের ইন্টারনেট, MP3 গান, JPEG ছবি, এমআরআই স্ক্যান এবং ফাইভ-জি মোবাইল যোগাযোগ কোনোটিই সম্ভব হতো না।

১. সমীকরণের বিশ্লেষণ: সময় থেকে কম্পাঙ্কের বর্ণালীতে যাত্রা

অবিচ্ছিন্ন ফুরিয়ার রূপান্তর সময়ের বা স্থানের ডোমেইনে থাকা একটি সংকেত $f(t)$-কে তার বিভিন্ন উপাংশ কম্পাঙ্কের বর্ণালীতে $hat f(xi)$ রূপান্তরিত করে:

$$hat f(xi) = int^{i}_{-infty} nfty f(t) e^{-2piixit}, dt$$

এবং কোনো তথ্য না হারিয়ে বিপরীত ফুরিয়ার রূপান্তরের মাধ্যমে সেই কম্পাঙ্ক বর্ণালী থেকে অবিকল আদি সংকেতকে পুনর্গঠন করা যায়:

$$f(t) = int^{i}_{-infty} nfty hat f(xi) e^{2piixit}, dxi$$

এই সমীকরণের প্রতিটি অংশ এক গভীর গাণিতিক সংকেতের বার্তা বহন করে:

- $f(t)$ **(সময়ের সংকেত):** সময়ের সাথে পরিবর্তিত শব্দ তরঙ্গ, মাইক্রোফোনের ভোল্টেজ বা অপটিক্যাল তীব্রতা।
- xi **(কম্পাঙ্ক):** হার্টজ ($textHz$) এককে তরঙ্গের প্রতি সেকেন্ডের ঘূর্ণন বা কম্পন সংখ্যা। কৌণিক কম্পাঙ্কে ($omega = 2pixi$) সমীকরণটি লেখা হয় $hat f(omega) = int f(t) e^{-iomegat} dt$।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- $e^{-2piixit}$ **(জটিল সূচকীয় কার্নেল):** অয়লারের সূত্রের মাধ্যমে e^{-2pi i xi t} = cos(2pi xi t) – i sin(2pi xi t)। এটি সংকেত $f(t)$-কে জটিল সমতলের একক বৃত্তের চারদিকে xi কম্পাঙ্কে পেঁচিয়ে দেয়।
- $hatf(xi)$ **(বর্ণালী বিস্তার):** একটি জটিল সংখ্যা। এর পরম মান $|hatf(xi)|$ নির্দেশ করে ঐ নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের শক্তি বা বিস্তার, এবং এর কোণ নির্দেশ করে তার ফেজ। যখন ইনপুট সংকেতের ভেতরে xi কম্পাঙ্ক বিদ্যমান থাকে, তখন পেঁচানো বৃত্তের বিন্দুগুলো একপাশে পুঞ্জীভূত হয়ে ভরকেন্দ্রে বিশাল স্পাইক সৃষ্টি করে।

২. গাণিতিক বৈশিষ্ট্য: ক্যালকুলাস থেকে সরল বীজগণিত

- **ব্যবকলনের বীজগণিতায়ন:** সময়ের সাপেক্ষে কোনো ফাংশনের ব্যবকলন করা ফুরিয়ার জগতে কেবল কম্পাঙ্ক দিয়ে গুণ করার সমতুল্য:

$$mathcalFleftfracdfdtright = (2piixi), hatf(xi)$$

  এর ফলেই জটিল তাপ সঞ্চালন বা তরঙ্গ সমীকরণগুলো ফুরিয়ার জগতে অতি সহজে সমাধান করা যায়।

- **কনভোলিউশন উপপাদ্য (Convolution Theorem):** দুটি জটিল সংকেতের ইন্টিগ্রাল মিশ্রণ বা কনভোলিউশন ফুরিয়ার ডোমেইনে অত্যন্ত সরল বিন্দুভিত্তিক গুণে পরিণত হয়:

$$mathcalFf * g = hatf(xi)cdothatg(xi)$$

  এটি আধুনিক অডিও রিভার্ব, নয়েজ ক্যান্সেলেশন এবং ছবির ফিল্টারিংয়ের প্রাণভোমরা।

- **পারসেভালের শক্তির সংরক্ষণশীলতা:** সময়ের ডোমেইনে মোট সংকেত শক্তি ফুরিয়ার কম্পাঙ্ক বর্ণালীর মোট শক্তির সমান:

$$int^i_{-infty}nfty|f(t)|^2, dt = int^i_{-infty}nfty|hatf(xi)|^2, dxi$$

৩. সংকেত ও কোয়ান্টামের অনিশ্চয়তা নীতি

একটি বাদ্যযন্ত্রের স্বর কি একই সাথে সময় ও কম্পাঙ্কে নিখুঁতভাবে সীমাবদ্ধ হতে পারে? ফুরিয়ার বিশ্লেষণ প্রমাণ করে এটি অসম্ভব। সময়ের ডোমেইনে কোনো সংকেত যত বেশি সংক্ষিপ্ত হবে (যেমন করতালির শব্দ), ফুরিয়ার ডোমেইনে তার কম্পাঙ্কের বিস্তার তত বেশি সর্বব্যাপী হয়ে পড়বে ($sigma_tcdotsigma_xigefrac14pi$)।

১৯২৭ সালে হাইজেনবার্গের কোয়ান্টাম অনিশ্চয়তা নীতি ($DeltaxcdotDeltapgehbar/2$) কোনো যান্ত্রিক সীমাবদ্ধতা নয়—বরং কণার অবস্থান ও ভরবেগের মধ্যকার ফুরিয়ার রূপান্তরেরই মৌলিক গাণিতিক ধর্ম।

৪. ফাস্ট ফুরিয়ার ট্রান্সফর্ম (FFT): আধুনিক সভ্যতার অ্যালগরিদম

N সংখ্যক ডেটা পয়েন্টের জন্য সরাসরি ফুরিয়ার রূপান্তর সম্পন্ন করতে $O(N^2)$ ধাপের হিসাব প্রয়োজন হতো। ১৯৬৫ সালে কুলি ও টুকি (Cooley and Tukey) উদ্ভাবন করেন **ফাস্ট ফুরিয়ার ট্রান্সফর্ম (FFT)**, যা হিসাবের জটিলতাকে $O(Nlog_2N)$-এ কমিয়ে আনে। এই একটি অ্যালগরিদমিক বিপ্লবের কারণে আজ রিয়েল-টাইমে ইউটিউব স্ট্রিমিং, এমআরআই স্ক্যান এবং ডিজিটাল সেলুলার নেটওয়ার্ক পরিচালনা সম্ভব হচ্ছে।

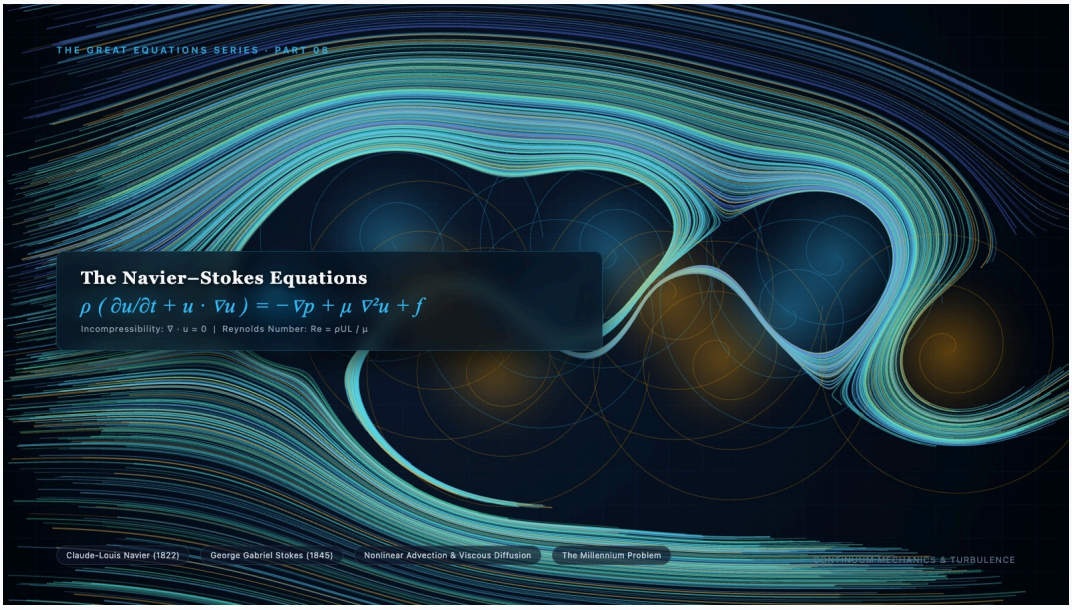
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ফুরিয়ার রূপান্তর — মহাবিশ্বকে বিশুদ্ধ সুরের বর্ণালীতে বিভাজন"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ৭। https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-07-fourier-transform-frequencies-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • অষ্টম খণ্ড

নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণ — প্রবাহী গতিবিদ্যা, টার্বুলেন্স ও বিশৃঙ্খলার মহাকাব্য

নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণ — প্রবাহী গতিবিদ্যা, টার্বুলেন্স ও বিশৃঙ্খলার মহাকাব্য

585 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৮: *চিত্র: নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণ ($rho (partial_t mathbf{u} + mathbf{u}cdotnablamathbf{u}) = -nabla p + munabla^2mathbf{u} + mathbf{f}$)। আরেখ পরিচলন ত্বরণ এবং সান্দ্র ঘর্ষণ সংঘাতের মধ্য দিয়ে শান্ত স্তরিত প্রবাহকে বিশৃঙ্খল ঘূর্ণি ও টার্বুলেন্সে রূপান্তরিত করে।*

এক কাপ গরম কফির ওপর সাদা দুধের ঘূর্ণি কিংবা নিভে যাওয়া মোমবাতির ধোঁয়ার দিকে তাকান। প্রথম কয়েক ইঞ্চি ধোঁয়া ওঠে একদম মসৃণ, স্বচ্ছ কাচের নলের মতো—শান্ত ও পূর্বানুমানযোগ্য (Laminar)। তারপর অকস্মাৎ সেই শান্ত স্তম্ভটি ভেঙে চুরমার হয়ে জন্ম দেয় ঘূর্ণায়মান প্যাঁচ, টার্বুলেন্ট এডি এবং বিশৃঙ্খল ফ্র্যাক্টাল মেঘের (Turbulence)। ১৮২২ সালে ফরাসি প্রকৌশলী ক্লোদ-লুই নেভিয়ার এবং ১৮৪৫ সালে ব্রিটিশ গণিতবিদ স্যার জর্জ গ্যাব্রিয়েল স্টোকস নিউটনের গতিসূত্রকে সান্দ্র তরল ও বাতাসের জন্য পরিমার্জিত করেন। জন্ম নেয় প্রবাহী গতিবিদ্যার শ্রেষ্ঠ সমীকরণ: **নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণ (The Navier-Stokes Equations)**। আজকের সুপারসনিক বোয়িং বিমানের নকশা, সাগরের বৈশ্বিক উষ্ণতা চক্র, হৃদপিণ্ডের ভালভের মধ্য দিয়ে রক্ত সঞ্চালন এবং ঘূর্ণিঝড়ের পূর্বাভাস—সবকিছুই পরিচালিত হয় এই সমীকরণ দ্বারা। অথচ দুই শতাব্দী পরও এটি ক্লে ম্যাথমেটিক্স ইনস্টিটিউটের এক মিলিয়ন ডলার পুরস্কারের মিলেনিয়াম প্রবলেম: গণিতবিদরা আজও প্রমাণ করতে পারেননি যে এই সমীকরণের সমাধান কি চিরকাল মসৃণ থাকবে, নাকি সসীম সময়ে তা অসীমে বিস্ফোরিত হবে।

১. সমীকরণের শরীরতত্ত্ব: তরল মাধ্যমের জন্য নিউটনের সূত্র

অসংকোচনীয় (Incompressible) নিউটনীয় তরলের জন্য (যেমন পানি বা সাধারণ গতিবেগের বাতাস), যার ঘনত্ব rho এবং সান্দ্রতা mu, নেভিয়ার-স্টোকসের ভরবেগ সমীকরণটি ভেক্টর ক্যালকুলাসের ভাষায় নিম্নরূপে প্রকাশিত হয়:

$$rholeft(fracpartialmathbfupartialt + (mathbfucdotnabla)mathbfuright) = -nablap + munabla^2mathbfu + mathbff$$

এবং ভরের সংরক্ষণশীলতার শর্তানুসারে:

$$nablacdotmathbfu = 0$$

এই একটি ভেক্টর সমীকরণ মূলত নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র $mathbfF = mmathbfa$-এর অবিচ্ছিন্ন প্রবাহী রূপ:

- rho **(প্রবাহীর ঘনত্ব):** প্রতি একক আয়তনের ভর, যা জড়তার ভূমিকা পালন করে।
- $fracpartialmathbfupartialt$ **(স্থানীয় ত্বরণ):** মহাকাশের কোনো নির্দিষ্ট স্থানে প্রবাহীর বেগের তাৎক্ষণিক পরিবর্তন।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- $(mathbf{u}cdotnabla)mathbf{u}$ **(পরিচলন ত্বরণ বা Advective Term):** বিশৃঙ্খলা ও টার্বুলেন্সের মূল চালিকাশক্তি। প্রবাহী নিজে প্রবাহিত হয়ে এমন এক অঞ্চলে প্রবেশ করে যেখানে বেগ ভিন্ন। এটি সমীকরণটিকে নন-লিনিয়ার বা অরেখ রূপ দেয়।
- $-nablap$ **(চাপের নতিমাত্রা বল):** তরল বা বাতাস সর্বদা উচ্চচাপ অঞ্চল থেকে নিম্নচাপ অঞ্চলের দিকে ধাবিত হয়।
- $munabla^2mathbf{u}$ **(সান্দ্র বিস্তার বা Viscous Dissipation):** অভ্যন্তরীণ আণবিক ঘর্ষণ। এটি প্রবাহের তীক্ষ্ণ চূড়াগুলোকে মসৃণ করে এবং গতিশক্তিকে তাপে রূপান্তরিত করে নিশ্চিহ্ন করে দেয়।
- $mathbf{f}$ **(বহিঃস্থ ক্ষেত্র বল):** অভিকর্ষজ বল ($rhomathbf{g}$) বা পৃথিবীর ঘূর্ণনজনিত কোরিওলিস বল।

২. উপাদানীয় অন্তরক: অয়লারীয় বনাম ল্যাগ্রাঞ্জীয় দৃষ্টিভঙ্গি

সমীকরণের বাম পাশে কেন বেগের দুটি অন্তরক থাকে? সেতুর ওপর দাঁড়িয়ে নিচে বয়ে যাওয়া নদী দেখার দৃষ্টিভঙ্গিকে বলা হয় *অয়লারীয় পদ্ধতি*, আর নৌকায় ভেসে নদীর সাথে বয়ে চলার দৃষ্টিভঙ্গিকে বলা হয় *ল্যাগ্রাঞ্জীয় পদ্ধতি*।

বহু-চলক চেইন রুল প্রয়োগ করলে কোনো গতিশীল তরল কণার সামগ্রিক ত্বরণ $fracDmathbfuDt$ দুটি অংশে বিভক্ত হয়ে যায়:

$$fracDmathbfuDt = fracpartialmathbfupartialt + (mathbfucdotnabla)mathbfu$$

যেহেতু বেগ $mathbfu$ নিজেই নিজের ওপর কাজ করে ($(mathbfucdotnabla)mathbfu$), তাই সমীকরণটি জটিলভাবে অরেখ (Nonlinear)। ফলে বড় ঘূর্ণিগুলো ভেঙে ক্ষুদ্র ঘূর্ণিতে এবং তা আরও ক্ষুদ্র ঘূর্ণিতে রূপান্তরিত হয়ে মহাজাগতিক টার্বুলেন্স সৃষ্টি করে।

৩. রেনল্ডস সংখ্যা: জড়তা বনাম সান্দ্রতার মহাযুদ্ধ

১৮৮৩ সালে অসবোর্ন রেনল্ডস দেখান যে প্রবাহী স্তরিত (Laminar) থাকবে নাকি বিশৃঙ্খল (Turbulent) হয়ে উঠবে, তা নির্ধারিত হয় একটি একক মাত্রাহীন অনুপাত দ্বারা:

$$Re = fracrhoULmu = fractextজড়তাবলtextসান্দ্রতাবল$$

- **নিম্ন রেনল্ডস সংখ্যা ($Rell1$):** সান্দ্র ঘর্ষণ পুরো গতি নিয়ন্ত্রণ করে। পানিতে সাঁতার কাটা ব্যাকটেরিয়ার জন্য পানি যেন ঘন মধুর মতো।
- **উচ্চ রেনল্ডস সংখ্যা (Re > 4000):** জড়তা সান্দ্রতাকে পরাজিত করে। স্তরিত প্রবাহ ভেঙে সৃষ্টি হয় কারমান ঘূর্ণি সড়ক (Kármán vortex street) ও তীব্র টার্বুলেন্স।

৪. এক মিলিয়ন ডলারের মিলেনিয়াম প্রবলেম

২০০০ সালে ক্লে ম্যাথমেটিক্স ইনস্টিটিউট নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণকে মানব ইতিহাসের সাতটি মহত্তম অমীমাংসিত গাণিতিক সমস্যার একটি ঘোষণা করে এবং এর প্রমাণের জন্য ১০ লক্ষ ডলার পুরস্কার ঘোষণা করে। প্রশ্নটি হলো: যেকোনো বাস্তব প্রাথমিক মসৃণ প্রবাহ থেকে শুরু করলে নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণের সমাধান কি চিরকাল মসৃণ থাকবে, নাকি অরেখ পরিচলনের কারণে সসীম সময়ে ঘূর্ণি অসীমে বিস্ফোরিত হয়ে সিঙ্গুলারিটি তৈরি করবে? মানবজাতি আজও এই রহস্যের উত্তর জানে না।

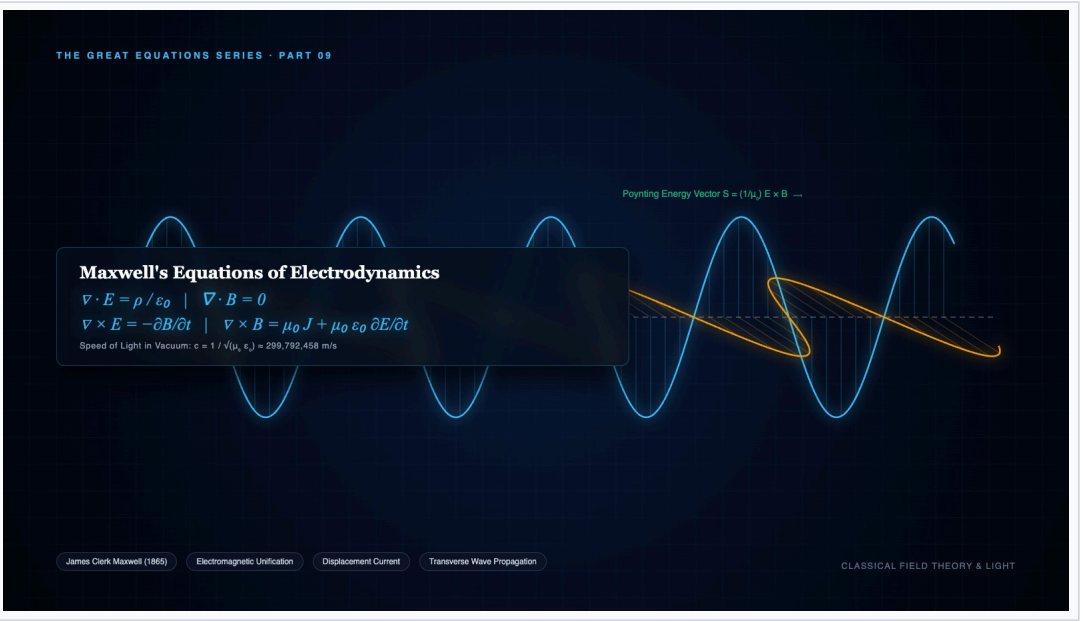
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "নেভিয়ার-স্টোকস সমীকরণ — প্রবাহী গতিবিদ্যা, টার্বুলেন্স ও বিশৃঙ্খলার মহাকাব্য"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ৮।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-08-navier-stokes-fluid-turbulence-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • নবম খণ্ড

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণমালা — বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় একীভবন ও আলোর মহাকাব্য

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণমালা — বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় একীভবন ও আলোর মহাকাব্য

538 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ৯: *চিত্র: ম্যাক্সওয়েলের বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় সমীকরণমালা। শূন্য মাধ্যমে তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র পরস্পর লম্বভাবে স্পন্দিত হয়ে আলোর গতিতে ($c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$) বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় তরঙ্গরূপে মহাকাশ পাড়ি দেয়—বিদ্যুৎ, চুম্বক ও আলোর একীভূত রূপরেখা।*

১৮৬০-এর দশকের শুরুতে স্কটিশ পদার্থবিজ্ঞানী জেমস ক্লার্ক ম্যাক্সওয়েল বিদ্যুৎ ও চুম্বকের বিচ্ছিন্ন সূত্রগুলোর দিকে গভীর দৃষ্টিপাত করেন: কুলম্বের স্থির তড়িৎ আকর্ষণ, অ্যাম্পিয়ারের তড়িৎবাহী তারের চারপাশে চৌম্বক ক্ষেত্রের জন্ম এবং ফ্যারাডের গতিশীল চুম্বক দ্বারা বিদ্যুৎ উৎপাদন। এই সূত্রগুলোর মধ্যে একটি সূক্ষ্ম গাণিতিক অসঙ্গতি ম্যাক্সওয়েলকে তাড়া করে ফিরছিল: কোনো ক্যাপাসিটর চার্জ হওয়ার সময় অ্যাম্পিয়ারের মূল সূত্র আধানের সংরক্ষণশীলতার শর্ত লঙ্ঘন করে। এই ফাটল মেরামতের জন্য ম্যাক্সওয়েল একটি যুগান্তকারী অদৃশ্য প্রবাহের ধারণা দেন: *সরণ প্রবাহ (Displacement Current)*। যখন তিনি এই একটি পদ সমীকরণে যোগ করলেন, তখন প্রকৃতির এক অপার্থিব রূপ উন্মোচিত হলো। তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্র কোনো তারের সাহায্য ছাড়াই শূন্য মাধ্যমের মধ্য দিয়ে পরস্পর লম্বভাবে স্পন্দিত হয়ে অবিরাম ছুটে চলতে শুরু করল। যখন ম্যাক্সওয়েল ল্যাবরেটরির তড়িৎ ধ্রুবক ব্যবহার করে তাদের গতিবেগ নির্ণয় করলেন, তিনি স্তম্ভিত হয়ে দেখলেন সংখ্যাটি দাঁড়ায় প্রতি সেকেন্ডে প্রায় ৩ লক্ষ কিলোমিটার। মানব ইতিহাসে প্রথমবারের মতো আলোর পরম সত্য উন্মোচিত হলো: *আলো আর কিছুই নয়, শূন্য মাধ্যমে সঞ্চালিত বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় তরঙ্গ*।

১. বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় বলবিদ্যার চার স্তম্ভ

অলিভার হেভিসাইড কর্তৃক ভেক্টর ক্যালকুলাসে পরিমার্জিত আধুনিক ম্যাক্সওয়েলের চারটি সমীকরণ হলো:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \text{(তড়িৎ ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(চৌম্বক ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র)} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(ফ্যারাডের আবেশ সূত্র)} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && \text{(অ্যাম্পিয়ার-ম্যাক্সওয়েল সূত্র)} \end{aligned}$$

প্রতিটি সমীকরণ মহাবিশ্বের এক একটি মৌলিক প্রতিসাম্য প্রকাশ করে:

- **তড়িৎ ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$):** তড়িৎ আধান হলো তড়িৎ ক্ষেত্রের উৎস বা কেন্দ্রবিন্দু। ধনাত্মক আধান থেকে বলরেখা চারিদিকে ছড়িয়ে পড়ে, ঋণাত্মক আধানে এসে মিলিত হয়। ε_0 হলো শূন্য মাধ্যমের প্রবেশ্যতা।
- **চৌম্বক ক্ষেত্রে গাউসের সূত্র ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$):** মহাবিশ্বে কোনো চৌম্বক একক মেরু (Magnetic Monopole) নেই। চৌম্বক বলরেখার কোনো শুরু বা শেষ নেই; তারা সর্বদা অবিচ্ছিন্ন বদ্ধ লুপ তৈরি করে।
- **ফ্যারাডের আবেশ সূত্র ($\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$):** সময়ের সাথে পরিবর্তিত চৌম্বক ক্ষেত্র একটি ঘূর্ণায়মান তড়িৎ ক্ষেত্রের জন্ম দেয়। এটিই প্রতিটি ডায়নামো, জেনারেটর ও জলবিদ্যুৎ কেন্দ্রের মূল ভিত্তি।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- **অ্যাম্পিয়ার-ম্যাক্সওয়েল সূত্র ($nablatimesmathbfB = mu_0mathbfJ + mu_0varepsilon_0partialmathbfE/partialt$):** চৌম্বক ক্ষেত্র কেবল তারের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত তড়িৎ ($mathbfJ$) দ্বারা নয়, বরং সময়ের সাথে পরিবর্তনশীল তড়িৎ ক্ষেত্র ($partialmathbfE/partialt$) দ্বারাও উৎপন্ন হয়। ম্যাক্সওয়েলের এই সরণ প্রবাহই মহাবিশ্বের শূন্য মাধ্যমে আলোর যাত্রাকে সম্ভব করেছে।

২. শূন্য মাধ্যম থেকে আলোর সমীকরণ প্রতিপাদন

পদার্থ ও আধানহীন শূন্য মাধ্যমে ($rho = 0, mathbfJ = mathbf0$) সমীকরণগুলো হয়: $nablacdotmathbfE = 0$ এবং $nablatimesmathbfB = mu_0varepsilon_0fracpartialmathbfEpartialt$। ফ্যারাডের সূত্রের উভয় পাশে কার্ল ($nablatimes$) নিলে:

$$nablatimes(nablatimesmathbfE) = -fracpartialpartialt(nablatimesmathbfB) = -mu_0varepsilon_0fracpartial^2mathbfEpartialt^2$$

ভেক্টর অভেদ nabla times (nabla times mathbf{E}) = nabla(nabla cdot mathbf{E}) – nabla^2 mathbf{E} = -nabla^2 mathbf{E} ব্যবহার করলে সরাসরি পাওয়া যায় দালঁবেরের ত্রি-মাত্রিক তরঙ্গ সমীকরণ:

$$nabla^2mathbfE = mu_0varepsilon_0fracpartial^2mathbfEpartialt^2$$

যার গতিবেগ $c = frac1sqrtmu_0varepsilon_0approx২,৯৯,৭৯২,৪৫৮textমিটার/সেকেন্ড$—যা নিখুঁতভাবে আলোর গতিবেগের সমান।

৩. বিশেষ আপেক্ষিকতার জন্ম

ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণে আলোর বেগ কোনো পর্যবেক্ষকের গতির ওপর নির্ভর করে না; এটি সার্বজনীন ধ্রুবক। ১৯০৫ সালে আইনস্টাইন উপলব্ধি করেন যে নিউটনের পরম স্থান-কালের ধারণা ভুল এবং ম্যাক্সওয়েল সঠিক। যেকোনো জড় কাঠামোতে আলোর বেগ ধ্রুব রাখার জন্যই সময় প্রসারিত হয় এবং স্থান সংকুচিত হয়—জন্ম নেয় বিশেষ আপেক্ষিকতা তত্ত্ব।

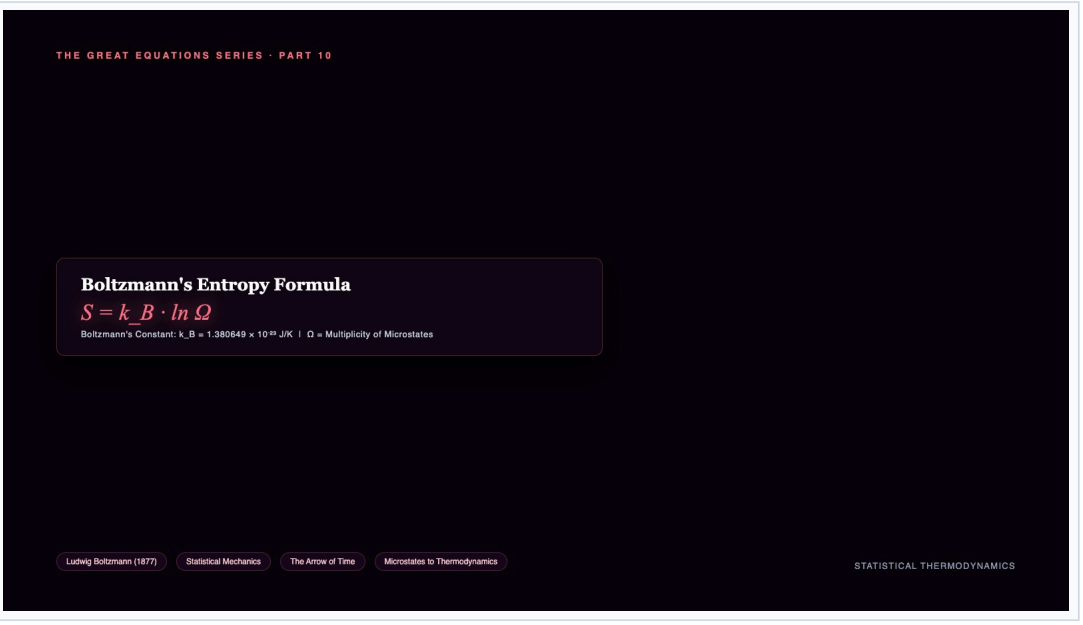
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণমালা — বিদ্যুৎ-চৌম্বকীয় একীভবন ও আলোর মহাকাব্য"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ৯।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-09-maxwells-equations-electrodynamics-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দশম খণ্ড

বোলৎজমানের এন্ট্রপি সমীকরণ — পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও কালের তির

বোলৎজমানের এন্ট্রপি সমীকরণ — পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও কালের তির

491 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১০: *চিত্র: লুডভিগ বোলৎজমানের এন্ট্রপি সমীকরণ ($S = k_B \ln \Omega$)। ম্যাক্রোস্কোপিক তাপগতীয় এন্ট্রপি হলো পদার্থের আণুবীক্ষণিক পারমাণবিক বিন্যাসের (Ω) লগারিদম—যা মহাবিশ্বের কালের তির ও অপ্রত্যাবর্তী রূপের দিক নির্দেশ করে।*

মেঝেতে একটি কাচের ফুলদানি পড়ে ভেঙে চুরমার হয়ে গেল। কিন্তু এই ঘটনাটির ভিডিও ধারণ করে উল্টো দিকে চালালে যে কেউ সাথে সাথে বলে দেবে এটি অসম্ভব: মেঝে থেকে কাচের টুকরোগুলো নিজে নিজে উড়ে এসে জোড়া লেগে কখনো আস্ত ফুলদানিতে পরিণত হবে না। অথচ আইজ্যাক নিউটনের গতিসূত্র কিংবা ম্যাক্সওয়েলের বিদ্যুৎ-চুম্বকের কোনো সূত্রেই সময়ের উল্টো যাত্রাকে নিষিদ্ধ করা হয়নি। পারমাণবিক কণার প্রতিটি সংঘর্ষ সম্পূর্ণ সময়-প্রতিসম (Time-Symmetric)। তাহলে আমাদের দৃশ্যমান মহাবিশ্বে কেন সময় সর্বদা একমুখী? কেন অতীতের স্মৃতি থাকে কিন্তু ভবিষ্যতের থাকে না? এই মহাজাগতিক রহস্য উন্মোচন করতে ১৮৭৭ সালে অস্ট্রিয়ান পদার্থবিজ্ঞানী লুডভিগ বোলৎজমান পরমাণুর অদৃশ্য জগৎ ও আমাদের তাপগতীয় বাস্তবতার মাঝে এক অমর সাঁকো তৈরি করেন—যার সমীকরণটি ভিয়েনায় তার সমাধিতে চিরতরে খোদাই করা রয়েছে: $S = k_B ln Omega$।

১. সমীকরণের পরিচয়: অণু-পরমাণু থেকে তাপগতিবিদ্যায় রূপান্তর

কোনো বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থার ম্যাক্রোস্কোপিক তাপগতীয় এন্ট্রপি S-এর সাথে তার আণুবীক্ষণিক মাইক্রোস্টেটের সংখ্যা $Omega$-এর সম্পর্ক নিম্নোক্ত অমর সমীকরণে আবদ্ধ:

$$S = k_B ln Omega$$

এই সংক্ষিপ্ত সমীকরণটি প্রকৃতির সবচেয়ে জটিল ধারণাকে ব্যাখ্যা করে:

- S **(তাপগতীয় এন্ট্রপি):** কোনো ব্যবস্থার বিশৃঙ্খলা বা হারিয়ে যাওয়া কার্যকর শক্তির পরিমাপ (একক: জুল প্রতি কেলভিন, $text J/K$)। রুডলফ ক্লসিয়াস ১৮৬৫ সালে এর সংজ্ঞা দিয়েছিলেন $dS = delta Q_{text rev}/T$।
- k_B **(বোলৎজমান ধ্রুবক):** আণুবীক্ষণিক গতিশক্তি ও ম্যাক্রোস্কোপিক তাপমাত্রার সংযোগকারী সার্বজনীন ধ্রুবক:

$$k_B approx ১.৩৮০৬৪৯ times ১০^{-২৩} text J/K$$

- $Omega$ **(মাইক্রোস্টেটের সংখ্যা বা মাল্টিপ্লিসিটি):** কোনো ব্যবস্থার নির্দিষ্ট তাপমাত্রা, চাপ ও আয়তন বজায় রেখে তার ভেতরে থাকা $১০^{২৩}$ সংখ্যক অণু-পরমাণুর অবস্থান ও ভরবেগের মোট সম্ভাব্য বিন্যাসের সংখ্যা।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- **প্রাকৃতিক লগারিদম (ln):** গুণাত্মক বিন্যাস সংখ্যাকে যোগাত্মক তাপগতীয় এন্ট্রপিতে রূপান্তরকারী গাণিতিক ভিত্তি।

২. কেন লগারিদম? স্বাধীন ব্যবস্থার যোগাত্মক ধর্ম

এন্ট্রপির সূত্রে লগারিদম কেন আসতেই হবে? বোলৎজমান যুক্তি দেন: দুটি স্বাধীন ব্যবস্থা A এবং B-এর কথা চিন্তা করুন। A-এর সম্ভাব্য বিন্যাস সংখ্যা $Omega_A$ এবং B-এর $Omega_B$ হলে, তাদের যৌথ ব্যবস্থার মোট বিন্যাস সংখ্যা গুণনবিধিমতে:

$$Omega_{AB} = Omega_A times Omega_B$$

কিন্তু তাপগতিবিদ্যায় সামগ্রিক এন্ট্রপি হতে হয় যোগাত্মক ($S_{AB} = S_A + S_B$)। অতএব, এন্ট্রপির এমন একটি অপেক্ষক $f(Omega)$ প্রয়োজন যা গুণকে যোগে রূপান্তরিত করে:

$$f(Omega_A times Omega_B) = f(Omega_A) + f(Omega_B)$$

গণিতে একমাত্র লগারিদম ফাংশনই এই শর্ত পূরণ করতে পারে ($f(Omega) = k ln Omega$)। পরমাণুর বিন্যাসের গুণাত্মক ধর্মই এন্ট্রপির লগারিদমিক রূপকে অনিবার্য করে তোলে।

৩. পরিসংখ্যানিক সত্য: কেন এন্ট্রপি সর্বদা বৃদ্ধি পায়

বোলৎজমানের আগে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রকে ($Delta S ge 0$) প্রকৃতির অনড় যান্ত্রিক আইন মনে করা হতো। বোলৎজমান প্রমাণ করলেন এটি কোনো অন্ধ নিষেধাজ্ঞা নয়, বরং **পরিসংখ্যানের পরম সম্ভাবনা**।

একটি পাত্রের অর্ধেক অংশে রাখা গ্যাস ছেড়ে দিলে তা পুরো পাত্রে ছড়িয়ে পড়ে—কারণ গ্যাস কণাগুলো ছড়িয়ে থাকার সম্ভাব্য বিন্যাসের সংখ্যা ($Omega$) এক কোণে আটকে থাকার বিন্যাসের চেয়ে কোটি কোটি গুণ বেশি। ফুলদানি ভেঙে যায় কিন্তু নিজে নিজে জোড়া লাগে না—কারণ আস্ত থাকার বিন্যাস মাত্র একটি, কিন্তু ভাঙা থাকার সম্ভাব্য বিন্যাস কোটি কোটি। সময় সামনে এগিয়ে চলে কেবল এই কারণে যে প্রকৃতি অন্ধভাবে সবচেয়ে বেশি বিন্যাসযুক্ত দশার দিকে ধাবিত হয়।

৪. ক্লদ শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি

১৯৪৮ সালে ক্লদ শ্যানন ডিজিটাল তথ্য তত্ত্বের ভিত্তি স্থাপন করার সময় তথ্যের অনিশ্চয়তার পরিমাপ হিসেবে বোলৎজমানের হুবহু একই সমীকরণ আবিষ্কার করেন ($H = -sum p_i log_2 p_i$)। বোলৎজমানের এন্ট্রপি মূলত প্রকৃতির কাছে লুকায়িত তথ্যের পরিমাপ।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "বোলৎজমানের এন্ট্রপি সমীকরণ — পরিসংখ্যানিক বলবিদ্যা ও কালের তির"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১০।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-10-boltzmann-entropy-arrow-of-time-bn/

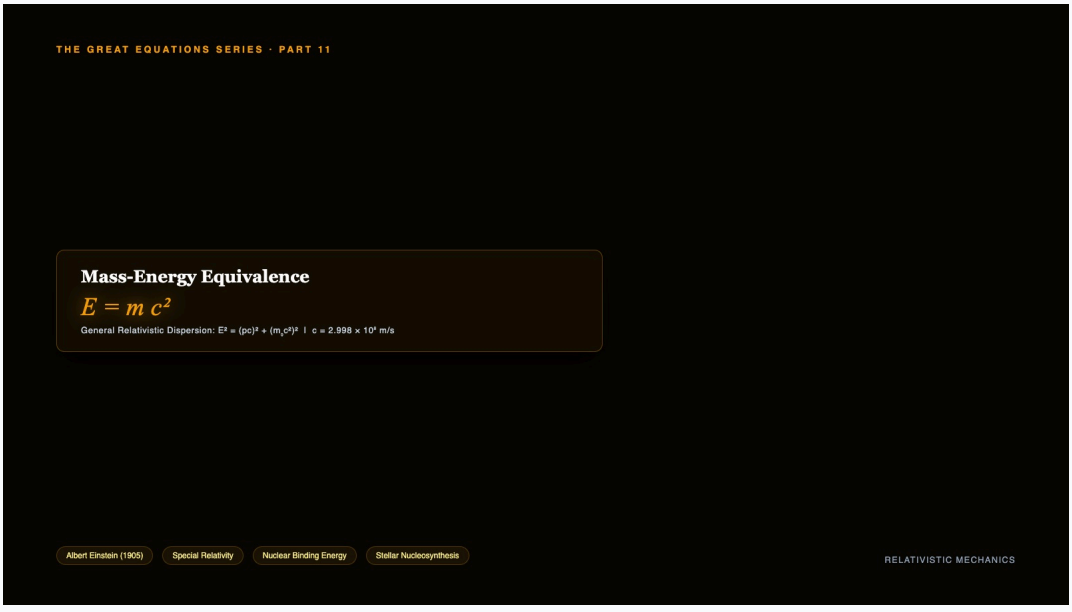
শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • একাদশ খণ্ড

ভর-শক্তি সমতুল্যতা — E = mc² ও পারমাণবিক শক্তির অগ্নিকুণ্ড

ভর-শক্তি সমতুল্যতা — $E = mc^2$ ও পারমাণবিক শক্তির অগ্নিকুণ্ড

370 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ

❖



চিত্র ১১: *চিত্র: আলবার্ট আইনস্টাইনের ভর-শক্তি সমতুল্যতা সমীকরণ ($E = mc^2$)। বিশেষ আপেক্ষিকতায় জড় ভর ও শক্তি মূলত একই সত্তার দুটি রূপ; পারমাণবিক ভরের সামান্যতম রূপান্তর নক্ষত্রের অন্তস্থলে মহাজাগতিক শক্তির অগ্নিকুণ্ড প্রজ্জ্বলিত করে।*

১৯০৫ সালের সেপ্টেম্বরের শেষভাগে বার্নের সুইস পেটেন্ট অফিসের ২৬ বছর বয়সী এক অজ্ঞাত ক্লার্ক আলবার্ট আইনস্টাইন জার্মান জার্নাল *আনালেন ডের ফিজিক*-এ মাত্র তিন পৃষ্ঠার একটি সংক্ষিপ্ত গবেষণাপত্র পাঠান। শিরোনামটি ছিল একটি প্রশ্ন: *“কোনো বস্তুর জড়তা কি তার অন্তর্গত শক্তির পরিমাণের ওপর নির্ভর করে?”* এটি ছিল তার ঐতিহাসিক ‘মিরাকল ইয়ার’ (Annus Mirabilis)-এর চতুর্থ গবেষণাপত্র। সেই তিন পৃষ্ঠায় আইনস্টাইন মানব চিন্তার চিরন্তন দুটি ধারাকে একত্রিত করেন: পদার্থ ও শক্তি কোনো ভিন্ন সত্তা নয়, বরং তারা একই মহাজাগতিক মুদ্রার এপিঠ-ওপিঠ। পাঁচটি চিহ্নে আবদ্ধ সমীকরণ $E = mc^2$ হলো নক্ষত্রের পরমাণু চুল্লির জ্বালানি, পারমাণবিক বোমার ধ্বংসক্ষমতা এবং মহাবিশ্বের প্রথম সেকেন্ডে পদার্থের সৃষ্টির পরম চাবিকাঠি।

১. সমীকরণের পরিচয়: প্রকৃতির বিনিময় হার

স্থির অবস্থায় থাকা কোনো বস্তুর নিশ্চল ভর m_0 হলে, তার মোট নিহিত শক্তির সমীকরণ:

$$E_0 = m_0 c^2$$

এবং বস্তু যখন ভরবেগ $mathbf{p}$ নিয়ে গতিশীল হয়, তখন সার্বিক আপেক্ষিক শক্তি রূপ ধারণ করে:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

সমীকরণের ধ্রুবক c^2-এর দিকে তাকালে প্রকৃতির অপার শক্তির রূপ বোঝা যায়:

$$c^2 = (২,৯৯,৭৯২,৪৫৮ text{মি/সে})^২ approx ৮.৯৮৭ times ১০^{১৬} text{মি}^২/text{সে}^২$$

c^2 একটি দানবীয় সংখ্যা। ফলে মাত্র ১ গ্রাম ভরের মধ্যে লুকিয়ে রয়েছে প্রায় $৯ times ১০^{১৩}$ জুল শক্তি—যা ২১.৫ কিলোটন টিএনটি বিস্ফোরণের সমতুল্য।

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. আপেক্ষিক কাজ থেকে প্রতিপাদন

বিশেষ আপেক্ষিকতায় কোনো গতিশীল কণার ভরবেগ $p = gammam_0v$ (যেখানে gamma = 1/sqrt{1 – v^2/c^2})। নিউটনের বল দ্বারা সম্পাদিত কাজ W গতিশক্তিতে (E_k) রূপান্তরিত হয়:

E_k = int_0^v v , dp = gamma m_0 v^2 – int_0^v gamma m_0 v , dv = gamma m_0 c^2 – m_0 c^2

অতএব মোট শক্তি $E = gammam_0c^2 = E_k + m_0c^2$। যখন কণা সম্পূর্ণ স্থির ($v = 0$), তখনও তার মধ্যে একটি আদি শক্তি অক্ষুণ্ণ থাকে: $E_0 = m_0c^2$। টেলর ধারা সম্প্রসারণ করলে:

$$Eapproxm_0c^2 + frac12m_0v^2$$

নিউটনের চিরায়ত গতিশক্তি $frac12mv^2$ আসলে আইনস্টাইনের অনন্ত শক্তি সাগরের একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র তরঙ্গমাত্র।

৩. পারমাণবিক ভর ত্রুটি ও নক্ষত্রের আলো

সূর্যের অন্তস্থলে প্রতি সেকেন্ডে চারটি হাইড্রোজেন প্রোটন ফিউশন বিক্রিয়ায় যুক্ত হয়ে একটি হিলিয়াম নিউক্লিয়াস তৈরি করে। মূল চারটি প্রোটনের ভরের চেয়ে তৈরি হওয়া হিলিয়ামের ভর প্রায় ০.৭% কম। এই নিখোঁজ ভরটুকুই $Deltamcdotc^2$ সূত্রে রূপান্তরিত হয়ে আলো ও তাপরূপে সৌরজগতে ছড়িয়ে পড়ে। প্রতি সেকেন্ডে সূর্য ৪৩ লক্ষ মেট্রিক টন ভরকে বিশুদ্ধ শক্তিতে রূপান্তর করে সমগ্র সৌরজগতকে আলোকিত রাখছে।

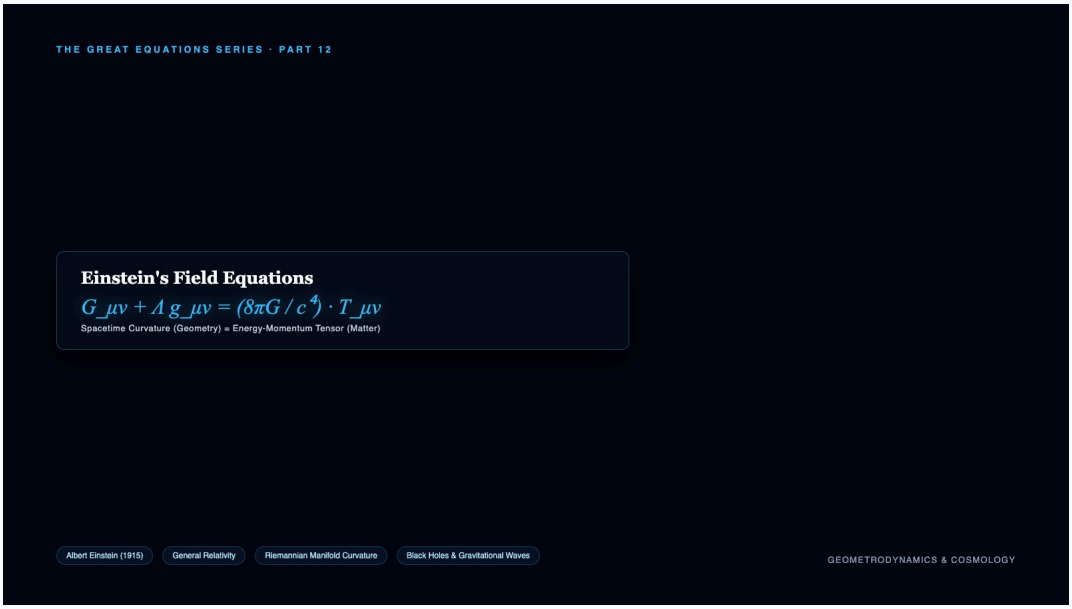
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ভর-শক্তি সমতুল্যতা — E = mc² ও পারমাণবিক শক্তির অগ্নিকুণ্ড"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১১। https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-11-mass-energy-equivalence-emc2-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • দ্বাদশ খণ্ড

আইনস্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণ — স্থান-কালের বক্রতা, জ্যামিতি ও কৃষ্ণগহ্বর

আইনস্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণ — স্থান-কালের বক্রতা, জ্যামিতি ও কৃষ্ণগহ্বর

413 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১২: *চিত্র: আইনস্টাইনের সাধারণ আপেক্ষিকতার ক্ষেত্র সমীকরণমালা ($G_{munu} + Lambda g_{munu} = frac{8pi G}{c^4} T_{munu}$)। ভর ও শক্তি চতুর্মাত্রিক স্থান-কালের জ্যামিতিকে বাঁকিয়ে দেয়, যা গ্রহের কক্ষপথ, আলোক রশ্মির বক্রতা এবং কৃষ্ণগহ্বরের জন্ম নিয়ন্ত্রণ করে।*

১৯১৫ সালের ২৫ নভেম্বর আট বছরের অবিশ্রান্ত মানসিক সংগ্রামের পর আলবার্ট আইনস্টাইন প্রুশিয়ান অ্যাকাডেমি অব সায়েন্সেসে মানব ইতিহাসের শ্রেষ্ঠ বুদ্ধিবৃত্তিক সৃষ্টি উপস্থাপন করেন: **সাধারণ আপেক্ষিকতার ক্ষেত্র সমীকরণমালা (Einstein's Field Equations)**। দুই শতাব্দীরও বেশি সময় ধরে মানুষ আইজ্যাক নিউটনের মহাকর্ষীয় তত্ত্বকে ধ্রুব সত্য হিসেবে মেনে নিয়েছিল—যেখানে মহাকর্ষ ছিল পরম ও অনড় ইউক্লিডীয় মঞ্চে বস্তুদের মধ্যে তাৎক্ষণিক অদৃশ্য টান। আইনস্টাইন এই ভিত্তি ধুলিস্যাৎ করে দিলেন। মহাকর্ষ মূলত কোনো আকর্ষণ বল নয়; মহাকর্ষ হলো চতুর্মাত্রিক স্থান-কালের নিজস্ব জ্যামিতিক বক্রতা। পদার্থবিজ্ঞানী জন আর্কিবল্ড হুইলারের কালজয়ী ভাষায়: *"স্থান-কাল পদার্থকে বলে দেয় কীভাবে চলতে হবে; পদার্থ স্থান-কালকে বলে দেয় কীভাবে বাঁকতে হবে।"*

১. সমীকরণের পরিচয়: জ্যামিতি বনাম পদার্থের ভারসাম্য

টেন্সর ক্যালকুলাসের সংক্ষিপ্ত ও রাজকীয় ভাষায় আইনস্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণটি হলো:

$$G_{munu} + Lambdag_{munu} = frac8piGc^4T_{munu}$$

আইনস্টাইন টেন্সর G_{munu}-কে বিস্তৃত করলে সমীকরণটি দাঁড়ায়:

R_{munu} – frac{1}{2} R g_{munu} + Lambda g_{munu} = frac{8pi G}{c^4} T_{munu}

একটি মাত্র লাইনে লেখা হলেও এটি মূলত চতুর্মাত্রিক স্থান-কালের **দশটি যুগলবদ্ধ ও চরম অরেখ আংশিক ব্যবকলনীয় সমীকরণের সেট** ($mu, nuin0, 1, 2, 3$):

- **বাম পাশ (স্থান-কালের বিশুদ্ধ জ্যামিতি):**
  - g_{munu} (মেট্রিক টেন্সর): স্থান-কালের মৌলিক পরিমাপক ফিতা, যা দুটি ঘটনার মধ্যকার দূরত্ব নির্ধারণ করে: $ds^2 = g_{munu}dx^mudx^nu$।
  - R_{munu} এবং R (রিচ্চি বক্রতা): রিম্যান বক্রতা টেন্সর থেকে উদ্ভূত, যা পরিমাপ করে মহাকর্ষীয় টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত কণাগুলোর চলার পথ কীভাবে পরস্পর কাছাকাছি আসে বা দূরে সরে যায়।
  - $Lambda$ (মহাজাগতিক ধ্রুবক বা ডার্ক এনার্জি): মহাবিশ্বের ত্বরান্বিত প্রসারণের চালিকাশক্তি।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- **ডান পাশ (পদার্থ ও শক্তি):**
  - T_{munu} (শক্তি-ভরবেগ টেন্সর): মহাবিশ্বের সমস্ত ভর, শক্তি, চাপ এবং সান্দ্রতার সমষ্টি।
- **সংযোজক ধ্রুবক** $frac8piGc^4$: স্থান-কালের কঠোরতার পরিমাপ। হরে আলোর বেগের চতুর্থ ঘাত (c^4) থাকায় স্থান-কাল অত্যন্ত কঠিন ও স্থিতিস্থাপক; কেবল কৃষ্ণগহ্বর বা নিউট্রন তারকার মতো দানবীয় ভরই একে দৃশ্যমানভাবে বাঁকাতে পারে।

২. নিউটনের দুর্বল মহাকর্ষীয় সীমার সাথে মিলন

ধীর গতিবেগ এবং দুর্বল মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে ($g_{00}approx -(1+2Phi/c^2)$) আইনস্টাইনের সমীকরণগুলো হুবহু নিউটনের পয়সোঁ সমীকরণে রূপান্তরিত হয়:

$$nabla^2 Phi = 4piGrho$$

নিউটন ভুল ছিলেন না; বরং নিউটনের সমীকরণ হলো আইনস্টাইনের বাঁকা স্থান-কালের অতি শান্ত ও ধীরগতির ছায়া।

৩. ঐতিহাসিক বিজয়: কৃষ্ণগহ্বর থেকে মহাকর্ষীয় তরঙ্গ

- **শোয়ার্জশিল্ড কৃষ্ণগহ্বর (১৯১৬):** কার্ল শোয়ার্জশিল্ড প্রথম প্রমাণ করেন কোনো ভর M যদি শোয়ার্জশিল্ড ব্যাসার্ধে ($r_s = 2GM/c^2$) সংকুচিত হয়, তবে স্থান-কাল অসীমে ভেঙে পড়ে এমন এক কৃষ্ণগহ্বর তৈরি করে যেখান থেকে আলোও পালাতে পারে না।
- **মহাকর্ষীয় লেন্সিং (১৯১৯):** সূর্যগ্রহণের সময় স্যার আর্থার এডিংটন সূর্যের পাশ দিয়ে আসা নক্ষত্রের আলোর বক্রতা মেপে আইনস্টাইনের ভবিষ্যৎবাণী নিখুঁতভাবে প্রমাণ করেন।
- **লাইগো মহাকর্ষীয় তরঙ্গ (২০১৫):** দুটি কৃষ্ণগহ্বরের সংঘর্ষ থেকে স্থান-কালের বুকে সৃষ্ট ঢেউ ১০০ বছর পর পৃথিবীতে শনাক্ত হয়ে আইনস্টাইনের মহাজাগতিক মাস্টারপিসকে চিরন্তন সত্য হিসেবে প্রতিষ্ঠিত করে।

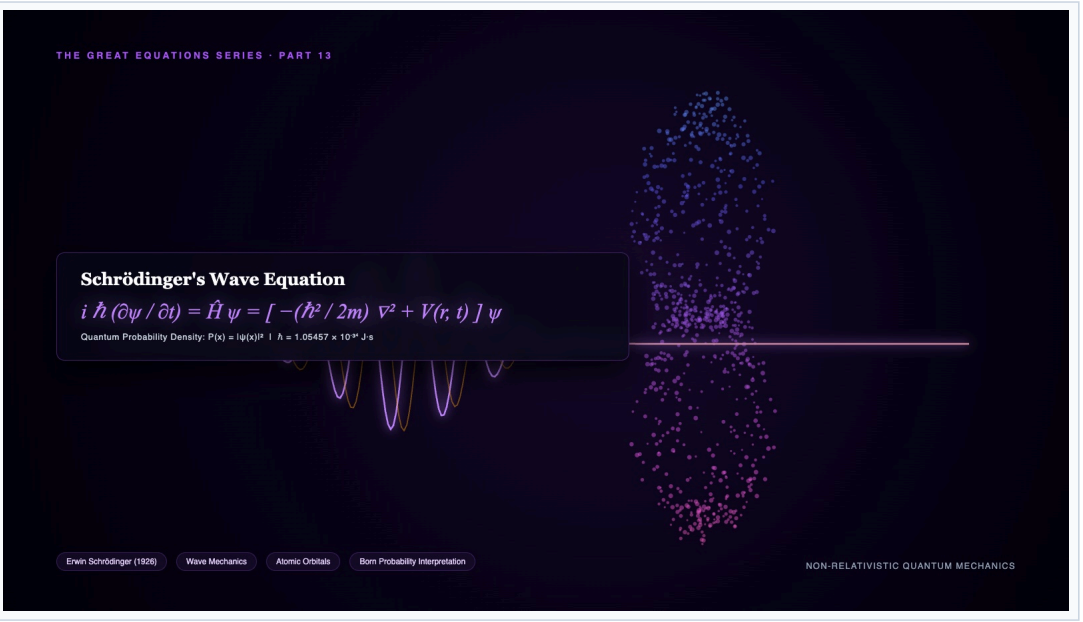
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "আইনস্টাইনের ক্ষেত্র সমীকরণ — স্থান-কালের বক্রতা, জ্যামিতি ও কৃষ্ণগহ্বর"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১২।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-12-einstein-field-equations-relativity-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ত্রয়োদশ খণ্ড

শ্রোডিঙ্গারের তরঙ্গ সমীকরণ — কোয়ান্টাম সম্ভাব্যতা ও পরমাণুর সুর

শ্রোডিঙ্গারের তরঙ্গ সমীকরণ — কোয়ান্টাম সম্ভাব্যতা ও পরমাণুর সুর

404 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৩: *চিত্র: এরভিন শ্রোডিঙ্গারের তরঙ্গ সমীকরণ ($ihbar partial_t psi = hat{H}psi$)। কোয়ান্টাম সম্ভাব্যতা বিস্তারের (psi) তরঙ্গ বলবিদ্যা যা হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রন মেঘের স্থির কক্ষপথ ও তরঙ্গ-প্যাকেটের স্থানিক প্রসারণ নির্ধারণ করে।*

১৯২৫ সালের ক্রিসমাসের ছুটিতে ৩৮ বছর বয়সী অস্ট্রিয়ান পদার্থবিজ্ঞানী এরভিন শ্রোডিঙ্গার সুইজারল্যান্ডের আল্পস পর্বতমালার আরোহা নামক এক নির্জন স্বাস্থ্যনিবাসে ছুটি কাটাতে যান। সেই তুষারাবৃত আল্পসের নিরিবিলিতে মানব ইতিহাসের অন্যতম সেরা তাত্ত্বিক বিপ্লব সংঘটিত হয়। লুই দ্য ব্রগলির যুগান্তকারী হাইপোথিসিস—পদার্থের কণাগুলোও তরঙ্গের মতো আচরণ করে—দ্বারা অনুপ্রাণিত হয়ে শ্রোডিঙ্গার বস্তুর তরঙ্গের জন্য একটি উপযুক্ত গাণিতিক সমীকরণ অনুসন্ধানে নামেন। মাত্র কয়েক সপ্তাহের ব্যবধানে তিনি নেমে আসেন পরমাণুর জগতের পরম চাবিকাঠি হাতে নিয়ে: **শ্রোডিঙ্গারের তরঙ্গ সমীকরণ (Schrödinger’s Wave Equation)**। এই একটি সমীকরণ নিলস বোরের বৃত্তাকার গ্রহতুল্য কক্ষপথের ত্রুটিপূর্ণ ধারণাকে চিরতরে বাতিল করে পরমাণুকে রূপান্তর করে ত্রি-মাত্রিক সম্ভাবনার সুরময় স্থির তরঙ্গে—যার ওপর ভিত্তি করে দাঁড়িয়ে আছে আধুনিক রসায়ন, অর্ধপরিবাহী সিলিকন চিপ, লেজার এবং কোয়ান্টাম কম্পিউটার।

১. সমীকরণের পরিচয়: কোয়ান্টাম জগতের গতিসূত্র

সময়ের ওপর নির্ভরশীল শ্রোডিঙ্গারের মূল সমীকরণটি হলো:

$$ihbar frac partial psi partial t = hat H psi = left(-frac hbar^2 2m nabla^2 + V(mathbf r, t)right)psi$$

এবং স্থির শক্তির ক্ষেত্রে সময়-স্বাধীন রূপটি হলো:

$$hat H psi = E psi$$

এই সমীকরণের প্রতিটি গাণিতিক সত্তা প্রকৃতির এক অভূতপূর্ব সত্য প্রকাশ করে:

- $i = sqrt -1$ **(কাল্পনিক একক):** প্রকৃতির একটি মৌলিক গতিসূত্রে জটিল সংখ্যার সরাসরি উপস্থিতি অপরিসীম তাৎপর্যপূর্ণ। i-এর উপস্থিতির কারণে কোয়ান্টাম তরঙ্গ ফাংশনগুলো জটিল মানবিশিষ্ট হয়, যার ফলে তারা কেবল ছড়িয়ে পড়ে না বরং তরঙ্গের মতো উপরিপাতিত হয়ে ব্যতিচার (Interference) তৈরি করে।
- $hbar = h/2pi$ **(কাট প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবক):** কোয়ান্টাম ক্রিয়ার মৌলিক ধ্রুবক (১.০৫৪৫৭$times$১০$^-৩৪$$text$জুল$cdot text$সেকেন্ড)।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- $psi(mathbf{r}, t)$ **(তরঙ্গ অপেক্ষক):** কোনো কোয়ান্টাম কণার সমস্ত তথ্যের ভাণ্ডার। ম্যাক্স বর্নের সম্ভাব্যতা ব্যাখ্যা অনুসারে (১৯২৬), এর মডুলাসের বর্গ $|psi(mathbf{r}, t)|^2$ নির্দেশ করে মহাকাশের কোনো বিন্দুতে কণাটিকে খুঁজে পাওয়ার পরম সম্ভাবনা ঘনত্ব।
- $-frac{bar^2}{2m}nabla^2$ **(গতিশক্তি অপারেটর):** কোয়ান্টাম ভরবেগ অপারেটর $hat{mathbf{p}} = -ihbarnabla$ থেকে উদ্ভূত।
- $V(mathbf{r}, t)$ **(বিভব শক্তি):** পরমাণুর অভ্যন্তরে নিউক্লিয়াসের ধনাত্মক চার্জ দ্বারা ইলেকট্রনকে টেনে রাখার কুলম্বীয় আকর্ষণ বিভব।
- $hat{H}$ **(হ্যামিল্টোনিয়ান অপারেটর):** কোয়ান্টাম ব্যবস্থার মোট শক্তির অপারেটর।

২. শক্তির কোয়ান্টায়ন কেন ঘটে?

পরমাণুর শক্তি কেন বিচ্ছিন্ন স্তরে কোয়ান্টায়িত হয়? চিরায়ত পদার্থবিদ্যায় কোনো ইলেকট্রন যেকোনো শক্তির মান নিতে পারত। শ্রোডিঙ্গার প্রমাণ করলেন কোয়ান্টায়ন কোনো আরোপিত নিয়ম নয়; এটি হলো **স্থির তরঙ্গের স্বাভাবিক সীমানা শর্ত (Boundary Conditions)**।

একটি গিটারের তার দুই প্রান্তে বাঁধা থাকলে যেমন কেবল নির্দিষ্ট সুর বা হারমোনিক্সে কাঁপতে পারে, ঠিক তেমনি নিউক্লিয়াসের আকর্ষণ কূপে বন্দি ইলেকট্রন তরঙ্গের বিস্তার অসীমে মিলিয়ে যেতে বাধ্য ($psi to 0$)। কেবল নির্দিষ্ট কিছু বিচ্ছিন্ন শক্তির মান (E_n) বসালেই এই ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান বাস্তবসম্মত থাকে:

$$E_n = -frac{13.6 texte{V}}{n^2}, quad n = 1, 2, 3, dots$$

রসায়নের সমস্ত সমযোজী বন্ধন, পর্যায় সারণির মৌলগুলোর বিন্যাস এবং অণুর গঠন মূলত শ্রোডিঙ্গারের এই স্থির তরঙ্গগুলোর ত্রিমাত্রিক নোডাল আকৃতি ছাড়া আর কিছুই নয়।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "শ্রোডিঙ্গারের তরঙ্গ সমীকরণ — কোয়ান্টাম সম্ভাব্যতা ও পরমাণুর সুর"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১৩। https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-13-schrodinger-wave-equation-quantum-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • চতুর্দশ খণ্ড

হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি — অনুবন্ধী সীমা ও কোয়ান্টাম শূন্যতা

হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি — অনুবন্ধী সীমা ও কোয়ান্টাম শূন্যতা

409 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৪: *চিত্র: ভের্নার হাইজেনবার্গের কোয়ান্টাম অনিশ্চয়তা নীতি ($Delta x cdot Delta p ge hbar/2, [hat{x}, hat{p}] = ihbar$)। অনুবন্ধী চলকের পরিমাপের পরম সীমা: কণার অবস্থান যত নিখুঁতভাবে নির্ধারিত হবে, তার ভরবেগের ফুরিয়ার বর্ণালী তত বেশি অনিশ্চিত হয়ে পড়বে।*

১৯২৭ সালের ফেব্রুয়ারির এক নিস্তব্ধ শীতের রাত। কোপেনহেগেনে নিলস বোরের ইনস্টিটিউটের শূন্য করিডোরে একাকী পায়চারি করছিলেন ২৫ বছর বয়সী জার্মান পদার্থবিজ্ঞানী ভের্নার হাইজেনবার্গ। একটি মৌলিক প্রশ্ন তাকে মাসের পর মাস তাড়িয়ে বেড়াচ্ছিল: *একটি ইলেকট্রন একই সাথে কোথায় আছে এবং কোথায় যাচ্ছে—আমরা কি কখনোই তা নিখুঁতভাবে জানতে পারব না?* হাইজেনবার্গ একটি কাল্পনিক মাইক্রোস্কোপের কথা ভাবলেন: ইলেকট্রনকে দেখতে হলে তার ওপর ফোটন কণা নিক্ষেপ করতে হবে। কিন্তু ফোটন যখনই ইলেকট্রনকে আঘাত করে, সেই আঘাতের ধাক্কায় ইলেকট্রনের গতিবেগ তীব্রভাবে বিচ্যুত হয়ে অজানা দিকে ছিটকে যায়। আলোকে যত বেশি সূক্ষ্ম করে ইলেকট্রনের অবস্থান নিশ্চিত করা হয়, ফোটনের শক্তির অভিঘাতে তার ভরবেগ তত বেশি বিশৃঙ্খল হয়ে পড়ে। সেই মুহূর্তে হাইজেনবার্গ উপলব্ধি করেন: এটি মানুষের যন্ত্রপাতির কোনো ত্রুটি নয়; এটি মহাবিশ্বের অন্তস্থ বুনটের এক পরম জ্যামিতিক নিয়ম: **হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি (The Uncertainty Principle)**।

১. সমীকরণের পরিচয়: কণার পরম সীমানা

হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি অনুযায়ী, যেকোনো কোয়ান্টাম কণার অবস্থান x এবং অনুবন্ধী ভরবেগ p_x-এর পরিমাপের অনিশ্চয়তার গুণফল কখনোই প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবকের অর্ধেকের নিচে নামতে পারে না:

$$Deltaxcdot Deltap_x ge frachbar2$$

এবং কোয়ান্টাম বলবিদ্যায় এই সমীকরণটি আসে অপারেটরের রূপান্তরযোগ্যতার অভাব থেকে (Non-Commutativity):

[hat{x}, hat{p}_x] = hat{x}hat{p}_x – hat{p}_xhat{x} = ihbar hat{I}

চিরায়ত পদার্থবিদ্যায় অবস্থান মেপে ভরবেগ মাপুন, কিংবা ভরবেগ মেপে অবস্থান মাপুন—ফলাফল একই থাকে (x cdot p – p cdot x = 0)। কিন্তু কোয়ান্টাম অপারেটর হিলবার্ট স্পেসের রূপান্তরকারী ম্যাট্রিক্স। আগে অবস্থান মাপলে কণার অবস্থা এমনভাবে পরিবর্তিত হয় যে পরে ভরবেগ পরিমাপ করলে এক সম্পূর্ণ ভিন্ন ফলাফল পাওয়া যায়।

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. অপারেটর থেকে সূত্রের নিখুঁত প্রতিপাদন

অপারেটর $hatxpsi = xpsi$ এবং $hatppsi = -ihbarfracdpsidx$ বিবেচনা করলে:

[hat{x}, hat{p}]psi = -ihbar x frac{dpsi}{dx} – left(-ihbar frac{d}{dx}(xpsi) right) = ihbar psi

রবার্টসন-শ্রোডিঙ্গার উপপাদ্য অনুযায়ী যেকোনো দুটি হারমিশিয়ান অপারেটরের জন্য $DeltaA^2cdotDeltaB^2geleft(frac12ilangle[hatA,hatB]rangleright)^2$। অতএব $hatA = hatx$ এবং $hatB = hatp$ বসালে সরাসরি প্রমাণিত হয়:

$$DeltaxcdotDeltapgefrachbar2$$

৩. মহাজাগতিক পরিণতি: কেন পরমাণু ধ্বংস হয় না

- **পরমাণুর স্থায়িত্ব:** চিরায়ত তত্ত্বে ধনাত্মক নিউক্লিয়াসের টানে ইলেকট্রন সেকেন্ডের ভগ্নাংশে কেন্দ্রে আছড়ে পড়ে বিশ্বজগৎ ধ্বংস করে দেওয়ার কথা ছিল। অনিশ্চয়তা নীতি একে বাঁচিয়ে রাখে: ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের একদম কাছে সংকুচিত হলে ($Deltaxto0$) তার ভরবেগের অনিশ্চয়তা অসীমের দিকে ধাবিত হয় ($Deltaptoinfty$), যা ইলেকট্রনকে তীব্র গতিশক্তিতে আবার দূরে ছিটকে দেয়।
- **কোয়ান্টাম টানেলিং:** কণার অবস্থান একটি বিস্তৃত সম্ভাব্যতা তরঙ্গ হওয়ায় ক্লাসিক্যাল বাধা অতিক্রমের মতো যথেষ্ট শক্তি না থাকা সত্ত্বেও কণা দেয়াল ভেদ করে ওপারে উপস্থিত হতে পারে। এর ফলেই সূর্যের কেন্দ্রে নিউক্লিয়ার ফিউশন এবং পেন ড্রাইভের ফ্ল্যাশ মেমরি কাজ করে।

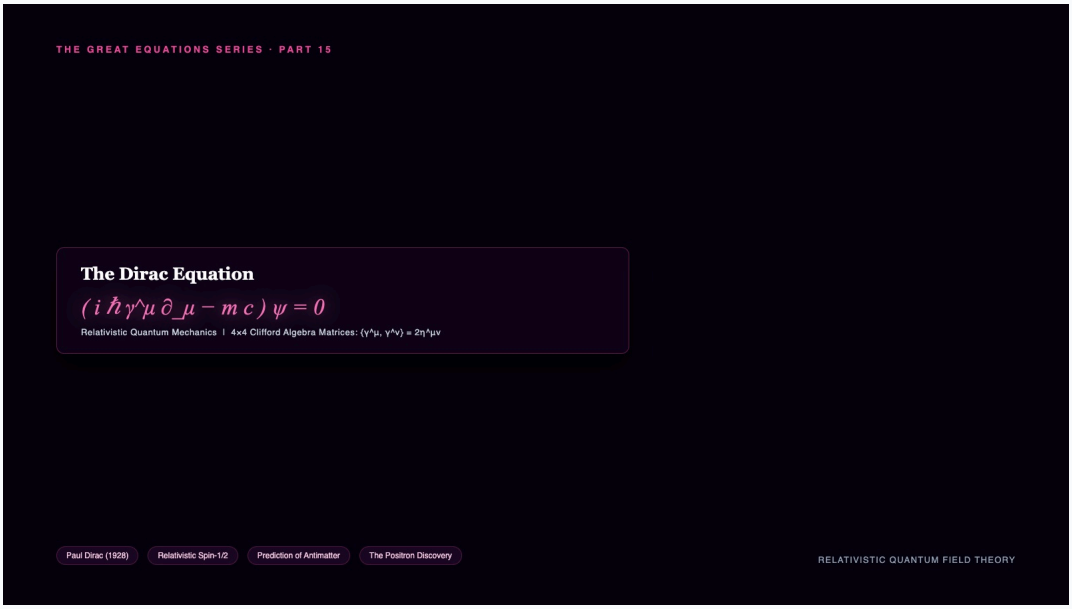
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "হাইজেনবার্গের অনিশ্চয়তা নীতি — অনুবন্ধী সীমা ও কোয়ান্টাম শূন্যতা"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১৪। https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-14-heisenberg-uncertainty-principle-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • পঞ্চদশ খণ্ড

ডিরাক সমীকরণ — আপেক্ষিক কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও প্রতিপদার্থের মহাকাব্য

ডিরাক সমীকরণ — আপেক্ষিক কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও প্রতিপদার্থের মহাকাব্য

453 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৫: *চিত্র: পল ডিরাকের আপেক্ষিক কোয়ান্টাম সমীকরণ ($(ihbargamma^mu partial_mu - mc)psi = 0$)। বিশেষ আপেক্ষিকতা ও স্পিন-১/২ কোয়ান্টাম কণার মিলন, যা প্রতিপদার্থের (পজিট্রন) অস্তিত্বের নির্ভুল ভবিষ্যৎবাণী করে।*

১৯২৮ সালে কেমব্রিজের সেন্ট জনস কলেজের ফায়ারপ্লেসের আগুনে দৃষ্টি নিবদ্ধ করে বসেছিলেন ২৫ বছর বয়সী অন্তর্মুখী ইংরেজ গণিতবিদ পল অ্যাড্রিয়েন মরিস ডিরাক। তৎকালীন পদার্থবিজ্ঞান এক মারাত্মক সংকটে নিপতিত ছিল: শ্রোডিঙ্গারের সমীকরণ পরমাণুর ধীরগতির ইলেকট্রনদের ব্যাখ্যা করতে পারলেও আলোর কাছাকাছি গতিতে চলা আপেক্ষিক ইলেকট্রনের ক্ষেত্রে অচল হয়ে পড়ে। অন্যদিকে আপেক্ষিক ক্লেইন-গর্ডন সমীকরণে সময়ের দ্বিতীয় অন্তরক থাকার কারণে ঋণাত্মক সম্ভাবনার ($P < 0$) মতো অসম্ভব ফলাফল আসছিল। ডিরাক এমন একটি সমীকরণ খুঁজছিলেন যা একই সাথে সময়ের ও স্থানের সাপেক্ষে এক-ঘাতবিশিষ্ট (Linear) হবে এবং আইনস্টাইনের বিশেষ আপেক্ষিকতার কাঠামো রক্ষা করবে। ফোর-বাই-ফোর ম্যাট্রিক্সের এক সম্পূর্ণ নতুন বীজগণিত উদ্ভাবন করে ডিরাক মানব ইতিহাসের অন্যতম শ্রেষ্ঠ সমীকরণ রচনা করেন: **ডিরাক সমীকরণ (The Dirac Equation)**। এই একটি সমীকরণ কেবল কণার স্বকীয় কোয়ান্টাম স্পিনকেই ($S = 1/2$) ব্যাখ্যা করেনি, বরং বিশ্বজগৎকে এক অবিশ্বাস্য সত্যের মুখোমুখি দাঁড় করিয়ে দেয়: মহাবিশ্বের প্রতিটি কণার বিপরীতে ঠিক সমভর কিন্তু বিপরীত চার্জযুক্ত এক যমজ সত্তা বিদ্যমান—যার নাম **প্রতিপদার্থ (Antimatter)**।

১. সমীকরণের পরিচয়: আপেক্ষিক কোয়ান্টাম সুর

প্রাকৃতিক এককে ($hbar = c = 1$) ডিরাক সমীকরণটির সংক্ষিপ্ত ও নিখুঁত রূপ হলো:

(i gamma^mu partial_mu – m) psi = 0

এই সমীকরণের প্রতিটি উপাদান পদার্থবিজ্ঞানের ইতিহাসে সম্পূর্ণ নতুন ছিল:

- $partial_m u$: স্থান ও কালের চতুর্মাত্রিক গ্রেডিয়েন্ট ভেক্টর, যা সময় ও স্থানকে সমান মর্যাদা দেয়।
- $gamma^m u$ **(ডিরাক গামা ম্যাট্রিক্স):** চারটি $4 times 4$ জটিল ম্যাট্রিক্স, যা ক্লিফোর্ড বীজগণিতের অ্যান্টি-কমিউটেশন নীতি মেনে চলে: $gamma^m u, gamma^n u = 2 eta^{munu} I_4$।
- psi **(ডিরাক স্পিনর):** একটি চার উপাংশবিশিষ্ট কলাম ভেক্টর ($psi_1, psi_2, psi_3, psi_4$)। দুটি উপাংশ স্পিন-আপ ও স্পিন-ডাউন ইলেকট্রন বর্ণনা করে; অপর দুটি উপাংশ পজিট্রন বা প্রতিপদার্থকে বর্ণনা করে।

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. আপেক্ষিক অপারেটরের বর্গমূল ও স্পিনের জন্ম

আইনস্টাইনের আপেক্ষিক শক্তি সূত্র হলো $E^2 = p^2 + m^2$। ডিরাক প্রশ্ন করলেন: আমরা কি এই অপারেটরের বর্গমূল নিতে পারি? $sqrtp^2 + m^2 = boldsymbolalphacdotmathbfp + betam$। উভয় পাশ বর্গ করলে দেখা যায় সহগগুলোকে অবশ্যই অ্যান্টি-কমিউট করতে হবে: $alpha_ialpha_j + alpha_jalpha_i = 0$। সাধারণ বাস্তব সংখ্যা কখনোই এই শর্ত পূরণ করতে পারে না; কেবল ন্যূনতম $4times4$ ম্যাট্রিক্সই এটি করতে পারে। অর্থাৎ কোয়ান্টাম কণার অর্ধ-পূর্ণসংখ্যা স্পিন ($S = 1/2$) কোনো আরোপিত ধর্ম নয়—এটি কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও বিশেষ আপেক্ষিকতার মিলনের এক অনিবার্য গাণিতিক ফল।

৩. ঋণাত্মক শক্তির সমুদ্র ও পজিট্রনের আবিষ্কার

ডিরাকের সমীকরণ দুটি সমাধান দেয়: ধনাত্মক শক্তি $E = +sqrtp^2 + m^2$ এবং ঋণাত্মক শক্তি $E = -sqrtp^2 + m^2$। ডিরাক এক অবিশ্বাস্য প্রস্তাব করলেন: মহাবিশ্বের শূন্য মাধ্যম মূলত ঋণাত্মক শক্তির ইলেকট্রনের এক পরিপূর্ণ অদৃশ্য সাগর (ডিরাক সি)। পাউলির অপবর্জন নীতির কারণে সাধারণ ইলেকট্রন সেখানে পড়ে যেতে পারে না। কিন্তু একটি উচ্চ শক্তির গামা রশ্মি ($hnuge2mc^2$) এই সাগরে আঘাত করলে একটি ঋণাত্মক ইলেকট্রন ছিটকে বের হয়ে আসে এবং সেখানে একটি খালি ‘গর্ত’ (Hole) তৈরি হয়। এই গর্তটিই আচরণ করে ধনাত্মক আধানযুক্ত ইলেকট্রন বা **পজিট্রন** হিসেবে। ১৯৩২ সালে কার্ল অ্যান্ডারসন মহাজাগতিক রশ্মিতে পজিট্রন আবিষ্কার করে ডিরাকের বিশুদ্ধ গাণিতিক ভবিষ্যৎবাণীকে সত্য প্রমাণ করেন।

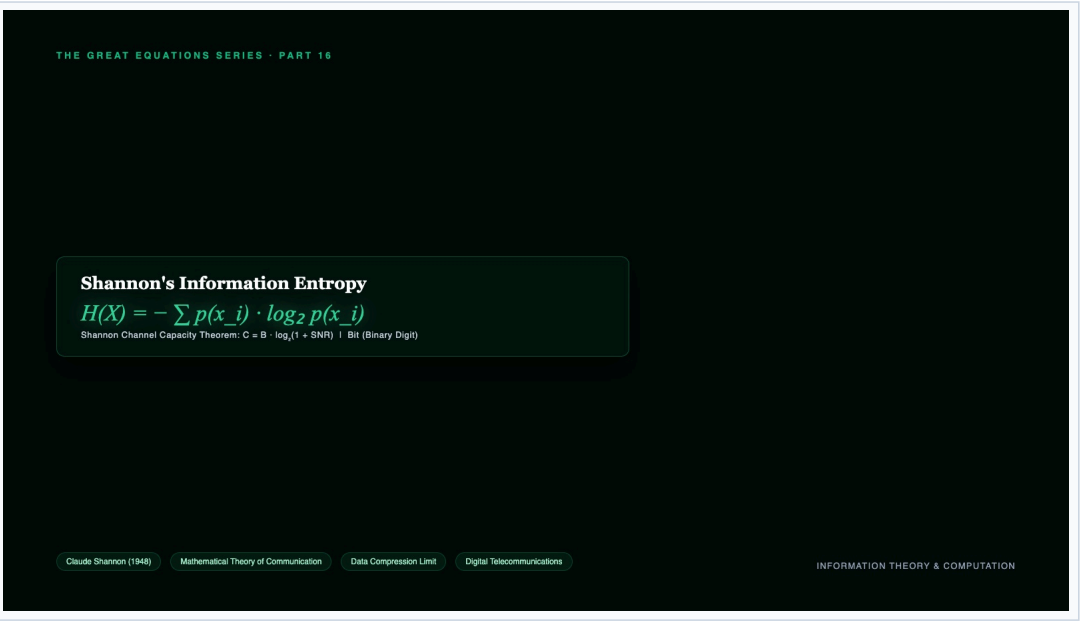
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "ডিরাক সমীকরণ — আপেক্ষিক কোয়ান্টাম বলবিদ্যা ও প্রতিপদার্থের মহাকাব্য"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১৫।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-15-dirac-equation-antimatter-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ষোড়শ খণ্ড

শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি — বিট, চ্যানেল ধারণক্ষমতা ও ডিজিটাল সভ্যতার ভোর

শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি — বিট, চ্যানেল ধারণক্ষমতা ও ডিজিটাল সভ্যতার ভোর

426 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৬: *চিত্র: ক্লদ শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি ($H(X) = -sum p(x)log_2 p(x)$) এবং চ্যানেল ধারণক্ষমতা সূত্র ($C = Blog_2(1 + text{SNR})$)। ডিজিটাল বিট, উপাত্ত সংকোচন ও আধুনিক টেলিযোগাযোগের গাণিতিক মূল ভিত্তি।*

১৯৪৮ সালে বেল টেলিফোন ল্যাবরেটরিজের ৩২ বছর বয়সী এক অন্তর্মুখী গণিতবিদ ও ক্রিপ্টোগ্রাফার ক্লদ এলউড শ্যানন (Claude Elwood Shannon) *বেল সিস্টেম টেকনিক্যাল জার্নাল*-এ মাত্র ৭৯ পৃষ্ঠার একটি গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন। শিরোনাম ছিল সাধারণ: *"যোগাযোগের একটি গাণিতিক তত্ত্ব" (A Mathematical Theory of Communication)*। শ্যাননের আগে টেলিযোগাযোগকে বিবেচনা করা হতো তারের ভোল্টেজ ও রেডিও তরঙ্গের অ্যামপ্লিফায়ারের মতো চিরায়ত অ্যানালগ প্রকৌশল সমস্যা হিসেবে। শ্যানন সেই পুরোনো দৃষ্টিভঙ্গি ভেঙে চুরমার করে দেন। তিনি প্রমাণ করলেন—মানুষের কণ্ঠস্বর, বিথোভেনের সিম্ফনি, মুদ্রিত বই কিংবা টেলিগ্রাফের মোর্স কোড—যেকোনো তথ্যকে তার বাহ্যিক মাধ্যম থেকে মুক্ত করে একটি সর্বজনীন গাণিতিক এককে রূপান্তর করা সম্ভব, যার নাম তিনি দেন **বিট (Bit বা Binary Digit)**। এই ডিজিটাল মহাবিপ্লবের কেন্দ্রবিন্দু ছিল তথ্যের অনিশ্চয়তা পরিমাপের এক অবিস্মরণীয় সমীকরণ: **শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি (Shannon's Information Entropy)**।

১. সমীকরণের পরিচয়: অনিশ্চয়তার পরিমাপক

কোনো বিচ্ছিন্ন তথ্য উৎস X, যার সম্ভাব্য ফলাফল $x_1, dots, x_n$ এবং প্রতিটি ঘটার সম্ভাবনা p_i, তার তথ্য এন্ট্রপি $H(X)$ সংজ্ঞায়িত হয়:

$$H(X) = -sum_{i=1}^{n} p(x_i) log_2 p(x_i)$$

যেখানে তথ্যের পরিমাণ ভিত্তি-২ লগারিদমের মাধ্যমে **বিট (Bits)** এককে পরিমাপ করা হয়:

- **বিস্ময় বা তথ্য উপাদান $I(x_i) = -log_2 p_i$:** কোনো ঘটনা নিশ্চিত হলে ($p = 1$), তা ঘটার খবর কোনো নতুন তথ্য দেয় না ($I = 0$ বিট)। কিন্তু কোনো ঘটনা অতি বিরল হলে ($p = 1/1024$), তা ঘটার খবর আমাদের ১০ বিটের সমান বিপুল তথ্য ও বিস্ময় উপহার দেয়। তথ্য হলো মূলত অনিশ্চয়তার অবসান।
- **$H(X)$ (গড় তথ্য এন্ট্রপি):** একটি অজানা ফলাফলকে সঠিকভাবে শনাক্ত করতে গড়ে কতগুলো বাইনারি হ্যাঁ/না প্রশ্ন করতে হবে তার পরিমাপ।
- **সর্বোচ্চ এন্ট্রপি:** যখন সমস্ত ফলাফল সমানভাবে সম্ভাব্য (Uniform Distribution, $p_i = 1/n$), তখন এন্ট্রপি সর্বোচ্চ হয়: $H_{textmax} = log_2 n$। একটি নিখুঁত মুদ্রার জন্য $H = ১.০ text{বিট}$।

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. তথ্য তত্ত্বের দুই স্বর্ণালী উপপাদ্য

- **১. সোর্স কোডিং উপপাদ্য (ডেটা কম্প্রেশনের চরম সীমা):** কোনো তথ্যকে কোনো তথ্য না হারিয়ে $H(X)$ বিটের চেয়ে বেশি সংকুচিত করা গাণিতিকভাবে অসম্ভব। আজকের জিপ ফাইল (ZIP, GZIP), পিএনজি ছবি এবং এমপিথ্রি মূলত শ্যাননের এই এন্ট্রপি সীমার দিকে ধাবিত অ্যালগরিদম।
- **২. চ্যানেল ক্যাপাসিটি উপপাদ্য (শব্দময় চ্যানেলের গতিসীমা):** নয়েজযুক্ত কোনো যোগাযোগ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে কি নিখুঁত তথ্য পাঠানো সম্ভব? শ্যানন প্রমাণ করলেন চ্যানেলের ধারণক্ষমতা C-এর নিচে থাকলে নির্ভুল কোডিংয়ের মাধ্যমে প্রায় শূন্য ত্রুটিতে তথ্য পাঠানো যায়:

$$C = Blog_2left(1 + fracSNright)$$

আজকের ফাইভ-জি মোবাইল নেটওয়ার্ক, ওয়াইফাই এবং অপটিক্যাল ফাইবার তারের সর্বোচ্চ গতি এই সমীকরণ দ্বারাই নির্ধারিত হয়।

৩. কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তা ও ক্রস-এন্ট্রপি লস

আজকের কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তা ও ডিপ লার্নিং মডেলে নিউরাল নেটওয়ার্ককে প্রশিক্ষিত করার সময় যে লস ফাংশন অপ্টিমাইজ করা হয়, তা মূলত শ্যানন এন্ট্রপিরই রূপ: **ক্রস-এন্ট্রপি লস (Cross-Entropy Loss)**। চ্যাটজিপিটি বা জেমিনির মতো লার্জ ল্যাঙ্গুয়েজ মডেল মূলত শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপির সূত্র মেনেই ভাষার জটিল সম্ভাবনা কাঠামো আয়ত্ত করে।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি — বিট, চ্যানেল ধারণক্ষমতা ও ডিজিটাল সভ্যতার ভোর"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১৬।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-16-shannon-information-entropy-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • সপ্তদশ খণ্ড

টুরিং কম্পিউটেবিলিটি ও হল্টিং প্রবলেম — যুক্তির অলঙ্ঘনীয় পরম সীমা

টুরিং কম্পিউটেবিলিটি ও হল্টিং প্রবলেম — যুক্তির অলঙ্ঘনীয় পরম সীমা

475 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৭: *চিত্র: অ্যালান টুরিংয়ের হল্টিং সমস্যা ও সার্বজনীন মেশিন। ক্যান্টরের ডায়াগোনাল প্যারাডক্সের মাধ্যমে প্রমাণিত হয় যে এমন কোনো সাধারণ অ্যালগরিদম তৈরি সম্ভব নয় যা যেকোনো প্রোগ্রাম থামবে কি না তা নির্ভুলভাবে নির্ধারণ করতে পারে।*

১৯২৮ সালে প্রখ্যাত জার্মান গণিতবিদ ডেভিড হিলবার্ট সমগ্র বিশ্বের বিজ্ঞানীদের সামনে একটি মহাবৈপ্লবিক চ্যালেঞ্জ উপস্থাপন করেন: *এন্টশাইডুংসপ্রবলেম (Entscheidungsproblem বা সিদ্ধান্ত সমস্যা)*। এমন কোনো সাধারণ যান্ত্রিক নিয়ম বা অ্যালগরিদম কি তৈরি করা সম্ভব, যা যেকোনো গাণিতিক প্রস্তাবনার সত্যতা বা মিথ্যাত্ব স্বয়ংক্রিয়ভাবে প্রমাণ করে দিতে পারে? দীর্ঘ আট বছর গণিতবিদরা এমন এক সর্বজ্ঞানী প্রুফ-মেশিনের স্বপ্ন দেখেছিলেন। অবশেষে ১৯৩৬ সালের গ্রীষ্মে কেমব্রিজের ২৪ বছর বয়সী গণিতবিদ অ্যালান টুরিং সেই স্বপ্নের সমাপ্তি ঘটান। কাগজের টেপ ও রিড-রাইট হেডের সমন্বয়ে একটি কাল্পনিক যন্ত্রের নকশা করে—যা আজকের সমস্ত আধুনিক কম্পিউটারের মূল ব্লুপ্রিন্ট—টুরিং অকাট্যভাবে প্রমাণ করেন যে গণিতের এমন কিছু মৌলিক প্রশ্ন রয়েছে যা কোনো কম্পিউটার কখনোই গণনা করতে পারবে না: **হল্টিং প্রবলেম (The Halting Problem)**। এটি কম্পিউটেশনের চিরন্তন সীমানা নির্ধারণ করে দেয়।

১. সমীকরণের পরিচয়: অনির্ণেয়তার গাণিতিক রূপ

হল্টিং সমস্যা জানতে চায়: এমন কোনো অ্যালগরিদম $textHALT(M, w)$ কি সম্ভব যা যেকোনো প্রোগ্রাম M এবং ইনপুট w বিশ্লেষণ করে বলে দেবে প্রোগ্রামটি কি সসীম সময়ে থেমে যাবে নাকি অনন্ত লুপে আটকে থাকবে?

text{HALT}(M, w) = begin{cases} 1 & text{যদি প্রোগ্রামটি সসীম ধাপে থেমে যায় (Halts)} \ 0 & text{যদি প্রোগ্রামটি অনন্ত লুপে চলতে থাকে (Infinite Loop)} end{cases}

টুরিংয়ের ঐতিহাসিক উপপাদ্য ঘোষণা করে:

$$textHALT(M, w)textচরমভাবেঅনির্ণেয়(UndecidablebaNon - Computable)$$

এর সাথে ঘনিষ্ঠভাবে যুক্ত হলো **কলমোগোরভ জটিলতা (Kolmogorov Complexity)** $K(x)$—কোনো স্ট্রিং x তৈরি করার জন্য সংক্ষিপ্ততম প্রোগ্রামের দৈর্ঘ্য:

$$K(x) = min_p|p| : U(p) = x$$

Shakil Mahmud • Research Monograph

কলমোগোরভ জটিলতাও অনির্ণেয়: কোনো নির্দিষ্ট প্রোগ্রামই যে কোনো উপাত্তের সবচেয়ে নিখুঁত ও সংক্ষিপ্ততম রূপ, তা কোনো অ্যালগরিদম দ্বারা প্রমাণ করা অসম্ভব।

২. টুরিংয়ের ডায়াগোনালাইজেশন প্রমাণ

টুরিংয়ের প্রমাণের সৌন্দর্য হলো স্ব-বিরোধাভাসমূলক যুক্তি (Proof by Contradiction)।

ধরা যাক এমন একটি কাল্পনিক প্রোগ্রাম $textHalt(M, w)$ বিদ্যমান যা নির্ভুল ভবিষ্যৎবাণী করতে পারে। এখন আমরা একটি বৈরী প্রোগ্রাম D তৈরি করি যা $textHalt$-এর বিপরীত আচরণ করবে:

begin{aligned} &textbf{অ্যালগরিদম } D(langle M rangle): \ &quad textbf{যদি } text{Halt}(M, langle M rangle) == 1 textbf{ হয়}: \ &quadquad textbf{অনন্ত লুপে ঢুকে যাও} quad text{(কখনোই থামবে না)} \ &quad textbf{নতুবা}: \ &quadquad textbf{থেমে যাও} quad text{(তৎক্ষণাৎ সমাপ্ত হবে)} end{aligned}
এখন প্রোগ্রাম D-এর ভেতরে ইনপুট হিসেবে যদি তার নিজের কোডই দেওয়া হয় ($D(langle Drangle)$), তবে কী ঘটবে?

- যদি $textHalt$ বলে D থামবে, তবে কোডের শর্তানুসারে D অনন্ত লুপে আটকে গিয়ে **কখনোই থামবে না**। চরম স্ব-বিরোধাভাস!
- যদি $textHalt$ বলে D অনন্ত লুপে চলবে, তবে কোডের শর্তানুসারে D তৎক্ষণাৎ **থেমে যাবে**। চরম স্ব-বিরোধাভাস!

উভয় ক্ষেত্রেই যুক্তি এক অসম্ভব দ্বন্দ্বে নিপতিত হয়: D থামবে ঠিক তখনই যখন সে থামবে না। অতএব, এমন কোনো সর্বজনীন হল্টিং অ্যালগরিদম তৈরি করা গণিত ও মহাবিশ্বের কোনো কম্পিউটারের পক্ষেই সম্ভব নয়।

৩. পরিণতি: আধুনিক কম্পিউটারের জন্ম ও রাইসের উপপাদ্য

এই অসম্ভবকে প্রমাণ করতে গিয়েই অ্যালান টুরিং সার্বজনীন টুরিং মেশিনের নকশা করেন—যেখানে একই মেমরিতে ডেটা এবং প্রোগ্রাম সংরক্ষিত থাকে, যার ওপর ভিত্তি করে জন ভন নিউম্যান আজকের আধুনিক কম্পিউটারের স্থাপত্য গড়ে তোলেন। ১৯৫৩ সালে রাইসের উপপাদ্য প্রমাণ করে যে কোনো প্রোগ্রামের নন-ট্রিভিয়াল আচরণ (যেমন এটি কি ক্র্যাশ করবে, ভাইরাস মুক্ত কি না) স্বয়ংক্রিয়ভাবে ১০০% নির্ভুলভাবে যাচাই করা গাণিতিকভাবে অসম্ভব।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "টুরিং কম্পিউটেবিলিটি ও হল্টিং প্রবলেম — যুক্তির অলঙ্ঘনীয় পরম সীমা"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১৭।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-17-turing-computability-halting-problem-bn/

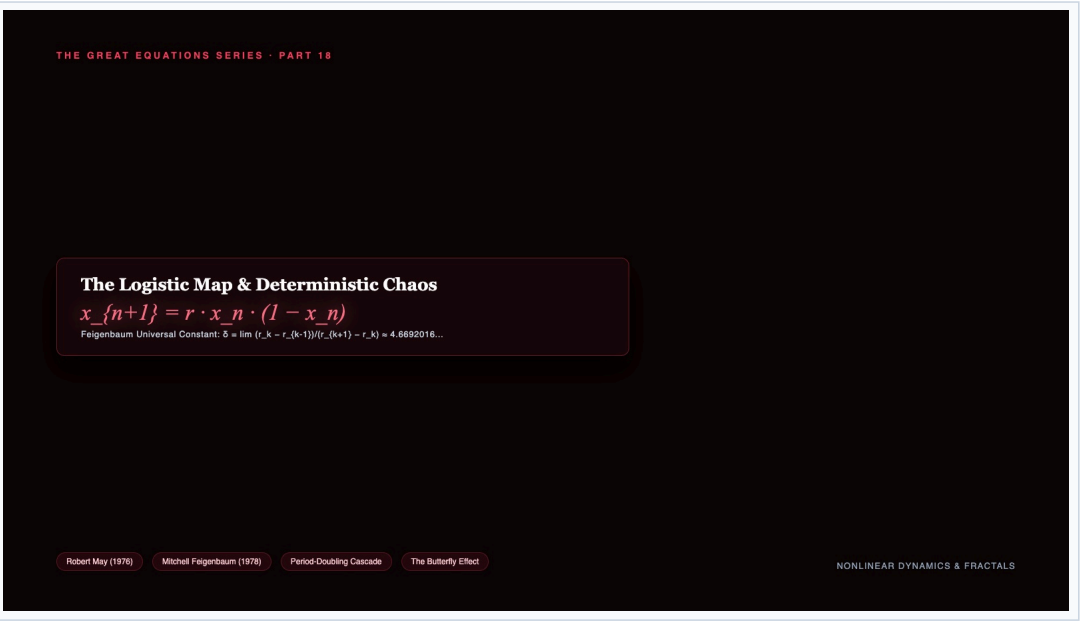
শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • অষ্টাদশ খণ্ড

লজিস্টিক ম্যাপ ও বিশৃঙ্খলা — পিরিয়ড-ডাবলিং বিভাজন ও বাটারফ্লাই ইফেক্ট

লজিস্টিক ম্যাপ ও বিশৃঙ্খলা — পিরিয়ড-ডাবলিং বিভাজন ও বাটারফ্লাই ইফেক্ট

447 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ

❖



চিত্র ১৮: *চিত্র: লজিস্টিক ম্যাপ ও নিয়ন্ত্রিত বিশৃঙ্খলা ($x_{n+1} = r x_n(1 - x_n)$)। ফাইগেনবাউম সার্বজনীন ধ্রুবক ($\delta \approx 4.6692$) দ্বারা নিয়ন্ত্রিত পিরিয়ড-ডাবলিং বিভাজন বৃক্ষ—যা প্রমাণ করে কীভাবে সরল অরেখ সমীকরণ থেকে জন্ম নেয় চরম বিশৃঙ্খলা ও বাটারফ্লাই ইফেক্ট।*

১৯৭৬ সালে অস্ট্রেলীয় তাত্ত্বিক বাস্তুসংস্থানবিদ রবার্ট মে (Robert May) বিশ্ববিখ্যাত বিজ্ঞান সাময়িকী *নেচার*-এ একটি মাইলফলক গবেষণাপত্র প্রকাশ করেন যার শিরোনাম ছিল: *"খুব জটিল গতিবিদ্যার অতি সাধারণ গাণিতিক মডেল"*। আইজ্যাক নিউটনের পর তিন শতাব্দী ধরে বিজ্ঞানীরা বিশ্বাস করতেন যে প্রকৃতির সমীকরণ যদি সরল ও পূর্বনির্ধারিত হয় (Deterministic), তবে তার ভবিষ্যৎও হবে শান্ত ও পূর্বানুমানযোগ্য। মহাবিশ্ব যেন একটি নিখুঁত ঘড়ির মতো—যার শুরুর অবস্থা নিখুঁতভাবে জানা থাকলে অনন্তকালের ভবিষ্যৎ গণনা করা সম্ভব। রবার্ট মে হাইস্কুল বীজগণিতের একটি সাধারণ দ্বি-ঘাত সমীকরণ ব্যবহার করে নিউটনের সেই ঘড়ি-মহাবিশ্বের অহংকার চূর্ণ করে দেন: **লজিস্টিক ম্যাপ (The Logistic Map)**। এই সমীকরণ প্রমাণ করে যে সমীকরণ সম্পূর্ণ পূর্বনির্ধারিত হওয়া সত্ত্বেও তার ভবিষ্যৎ হতে পারে সম্পূর্ণ অনিশ্চিত ও বিশৃঙ্খল—জন্ম নেয় আধুনিক **ক্যাওস তত্ত্ব (Chaos Theory)** এবং প্রকৃতির এক নতুন সার্বজনীন ধ্রুবক: মিচেল ফাইগেনবাউমের $delta approx 4.6692$।

১. সমীকরণের পরিচয়: সরলতার ভেতরে লুকিয়ে থাকা জটিলতা

কোনো সীমাবদ্ধ পরিবেশে কোনো প্রজাতির জনসংখ্যার বার্ষিক পরিবর্তন $x_n in [0, 1]$ পরিমাপ করার লজিস্টিক সমীকরণটি হলো:

$$x_{n+1} = r x_n (1 – x_n)$$

সমীকরণটিতে দুটি বিপরীতমুখী শক্তি কাজ করে:

- $x_n in [0, 1]$: সর্বোচ্চ ধারণক্ষমতার সাপেক্ষে বর্তমান জনসংখ্যার ভগ্নাংশ।
- **বৃদ্ধির পদ ($r x_n$):** প্রাকৃতিক বংশবৃদ্ধি (r হলো বৃদ্ধির হার, $0 < r le 4$)।
- **সীমাবদ্ধতার পদ ($1 – x_n$):** খাদ্য সংকট ও মহামারীর নেতিবাচক প্রভাব। জনসংখ্যা ১-এর কাছাকাছি পৌঁছালে সম্পদ ফুরিয়ে গিয়ে পরবর্তী প্রজন্মে জনসংখ্যা ধসে পড়ে।

২. বিশৃঙ্খলার পথ: পিরিয়ড-ডাবলিং বিভাজন বৃক্ষ

বৃদ্ধির পরামিতি r-এর মান পরিবর্তনের সাথে সাথে এই সমীকরণের আচরণে অবিশ্বাস্য পরিবর্তন ঘটে:

- $1 le r le 3$: জনসংখ্যা একটি স্থির শান্ত ভারসাম্যে ($x^* = 1 – 1/r$) পৌঁছে যায়।

Shakil Mahmud • Research Monograph

- $rapprox ৩.৪৪৯$: স্থির বিন্দু ভেঙে দুই মানবিশিষ্ট চক্রে রূপ নেয় (এক বছর বন্যা, পরের বছর খরা)।
- $rapprox ৩.৫৪৪$: চক্রটি দ্বিগুণ হয়ে চার মানে রূপ নেয়। এরপর ৮, ১৬, ৩২...
- $r_infty approx ৩.৫৬৯৯ dots$ **(ক্যাওসের সূচনা):** দ্বিগুণ হওয়ার প্রক্রিয়া অনন্ত দ্রুততায় ঘটে বিশৃঙ্খলার জগতে প্রবেশ করে। জনসংখ্যা কখনোই আর কোনো পুনরাবৃত্তিতে ফিরে আসে না—জন্ম নেয় ফ্র্যাক্টাল টার্বুলেন্স।

৩. ফাইগেনবাউম সার্বজনীন ধ্রুবক

১৯৭৮ সালে গণিতবিদ মিচেল ফাইগেনবাউম আবিষ্কার করেন যে প্রতিটি বিভাজনের মধ্যবর্তী দূরত্বের অনুপাত একটি পরম সার্বজনীন ধ্রুবকে রূপান্তরিত হয়:

delta = lim_{k to infty} frac{r_k – r_{k-1}}{r_{k+1} – r_k} approx ৪.৬৬৯২০১৬dots

এই ধ্রুবকটি pi বা e-এর মতোই প্রকৃতির মৌলিক সত্য। তরল হিলিয়ামের ঘূর্ণি প্রবাহ, ইলেকট্রনিক সার্কিটের অসিলেশন কিংবা মানুষের হৃদপিণ্ডের অ্যারিদমিয়ার চিকিৎসায় হুবহু এই একই ফাইগেনবাউম ধ্রুবক দৃশ্যমান হয়।

৪. বাটারফ্লাই ইফেক্ট: পূর্বনির্ধারিত কিন্তু অনিশ্চিত

ক্যাওস অঞ্চলে শুরুর উপাত্তে যদি মাত্র এক ট্রিলিয়ন ভাগের এক ভাগ তফাত থাকে ($x_0 = ০.৫০০০০০০০০০০০$ বনাম ০.৫০০০০০০০০০০১), তবে লিয়াপুনভ এক্সপোনেন্টের (lambda = ln 2 > 0) কারণে সেই ক্ষুদ্র তফাত সূচকীয় হারে বৃদ্ধি পেয়ে মাত্র ৫০ ধাপ পর সম্পূর্ণ ভিন্ন মহাবিশ্ব তৈরি করে। এটিই এডওয়ার্ড লরেঞ্জের বিখ্যাত **বাটারফ্লাই ইফেক্ট**: ব্রাজিলে একটি প্রজাপতির ডানা নাড়ার বাতাসের আলোড়ন টেক্সাসে একটি ঘূর্ণিঝড়ের জন্ম দিতে পারে। প্রকৃতিতে নিখুঁত দীর্ঘমেয়াদী আবহাওয়ার পূর্বাভাস কখনোই সম্ভব নয়।

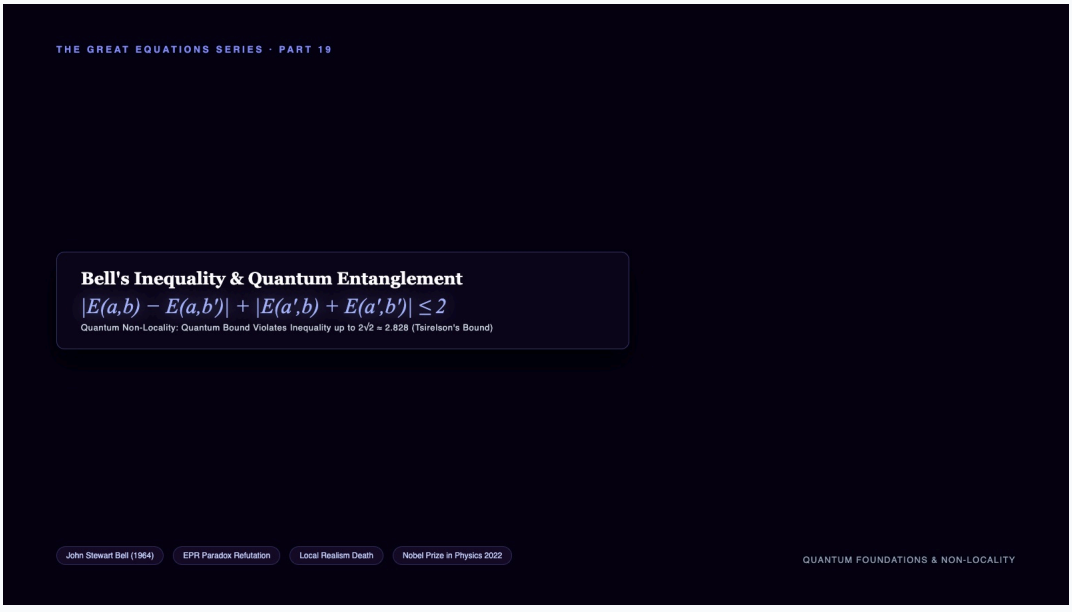
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (২০২৬)। "লজিস্টিক ম্যাপ ও বিশৃঙ্খলা — পিরিয়ড-ডাবলিং বিভাজন ও বাটারফ্লাই ইফেক্ট"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১৮।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-18-logistic-map-chaos-bifurcations-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • ঊনবিংশ খণ্ড

বেলের অসমতা ও কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গলমেন্ট — স্থানীয় বাস্তববাদের অবসান

বেলের অসমতা ও কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গলমেন্ট — স্থানীয় বাস্তববাদের অবসান

432 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ১৯: *চিত্র: জন স্টুয়ার্ট বেলের অসমতা সূত্র। এই সমীকরণ প্রমাণ করে যে আইনস্টাইনের স্থানীয় বাস্তববাদ ভ্রান্ত—কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গলমেন্টের মাধ্যমে দুটি কণা স্থান-কালের যেকোনো দূরত্বেই তাৎক্ষণিকভাবে সংযুক্ত থাকে।*

১৯৩৫ সালে আলবার্ট আইনস্টাইন, বরিস পোডলস্কি এবং নাথান রোজেন তাদের বিখ্যাত ‘ইপিআর পেপার’ (EPR Paper) প্রকাশ করে কোয়ান্টাম বলবিদ্যাকে অসম্পূর্ণ দাবি করেন। আইনস্টাইন কিছুতেই মানতে পারছিলেন না যে মহাবিশ্বের এক প্রান্তে একটি কণার স্পিন মাপলে কোটি কোটি আলোকবর্ষ দূরের অপর কণাটির অবস্থা তাৎক্ষণিকভাবে নির্ধারিত হয়ে যাবে—তিনি একে তীব্র ব্যঙ্গ করে নাম দিয়েছিলেন *“দূরবর্তী ভুতুড়ে ক্রিয়া” (Spooky action at a distance)*। আইনস্টাইনের দাবি ছিল: প্রকৃতি অবশ্যই **স্থানীয় বাস্তববাদ (Local Realism)** মেনে চলে; পরিমাপের আগেই বস্তুর নিশ্চিত বৈশিষ্ট্য থাকে এবং আলোর চেয়ে দ্রুত কোনো তথ্য যেতে পারে না। দীর্ঘ ৩০ বছর ধরে এটি নিছক দার্শনিক বিতর্ক হিসেবে পড়ে ছিল। অবশেষে ১৯৬৪ সালে সার্ন (CERN)-এর উত্তর আইরিশ তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানী জন স্টুয়ার্ট বেল একটি যুগান্তকারী গাণিতিক অসমতা প্রণয়ন করেন: **বেলের অসমতা (Bell’s Inequality)**। বেল প্রমাণ করলেন আইনস্টাইনের স্থানীয় বাস্তববাদ যদি সত্যি হয়, তবে প্রকৃতির কোনো পরীক্ষা একটি নির্দিষ্ট গাণিতিক সীমা (২) অতিক্রম করতে পারবে না। আজকের ল্যাবরেটরি পরীক্ষাগুলো সেই সীমাকে চূড়ান্তভাবে গুঁড়িয়ে দিয়ে প্রমাণ করেছে যে আমাদের মহাবিশ্ব মূলত **অ-স্থানীয় (Non-Local)**।

১. সমীকরণের পরিচয়: চিরায়ত বাস্তবতার অলঙ্ঘনীয় সীমা

ক্লজার-হর্ন-শিমোনি-হল্ট (CHSH) প্রণালীতে এলিস ও বব দুটি এন্ট্যাঙ্গলড কণার স্পিন বা মেরুকরণ পরিমাপ করে। এলিসের ডিটেক্টর কোণ a বা a’, আর ববের ডিটেক্টর কোণ b বা b’ হলে, পারস্পরিক কোরিলেশন $E(a, b)$।

আইনস্টাইনের **স্থানীয় বাস্তববাদ** সত্য হলে পরিমাপের কোরিলেশন অবশ্যই নিম্নোক্ত অসমতা মেনে চলবে:

$$S_{\text{classical}} = |E(a, b) – E(a, b’)| + |E(a’, b) + E(a’, b’)| \le 2$$

কিন্তু **কোয়ান্টাম বলবিদ্যায়** এন্ট্যাঙ্গলড কণার কোরিলেশন নির্ধারিত হয় ডিটেক্টরের কোণের মাধ্যমে: $E(a, b) = -cos(theta_{ab})$। ৪৫ ডিগ্রি কোণের ব্যবধানে পরিমাপ করলে কোয়ান্টাম মান দাঁড়ায়:

$$S_{\text{quantum}} = 2\sqrt{2} \approx ২.৮২৮ > ২$$

যেহেতু ২.৮২৮ > ২, কোয়ান্টাম তত্ত্ব সরাসরি আইনস্টাইনের চিরায়ত বাস্তবতাকে নাকচ করে দেয়।

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. সিএইচএসএইচ সূত্রের নিখুঁত প্রতিপাদন

চিরায়ত তত্ত্বে প্রতিটি পরিমাপের ফলাফল $A, Bin-1, +1$। যে কোনো পরীক্ষার জন্য:

A(a)[B(b) – B(b’)] + A(a’)[B(b) + B(b’)] = pm 2

যেহেতু $B(b)$ ও B(b’) কেবল $pm1$ হতে পারে, তাই যেকোনো একটি বন্ধনী শূন্য এবং অপরটি $pm2$ হতে বাধ্য। সম্ভাবনার ঘনত্ব দ্বারা সমাকলন করলে পরম মান কখনোই ২ অতিক্রম করতে পারে না:

|E(a, b) – E(a, b’)| + |E(a’, b) + E(a’, b’)| le 2

৩. স্থানীয় বাস্তববাদের মৃত্যু ও ২০২২ সালের নোবেল পুরস্কার

১৯৮২ সালে ফরাসি বিজ্ঞানী আলাঁ আস্পে (Alain Aspect) আলোর গতিতে ডিটেক্টরের কোণ দ্রুত পরিবর্তন করে পরীক্ষা সম্পন্ন করেন এবং প্রমাণ করেন $S = ২.৬৯৭$, যা বেলের অসমতা লঙ্ঘন করে। ২০১৫ সালে সমস্ত লুপহোল বন্ধ করে পরীক্ষা সম্পন্ন হয়। ২০২২ সালে আলাঁ আস্পে, জন ক্লজার এবং আন্তন জাইলিঙ্গারকে কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গলমেন্ট ও বেলের অসমতা প্রমাণের জন্য পদার্থবিজ্ঞানে নোবেল পুরস্কারে ভূষিত করা হয়। আইনস্টাইনের স্থানীয় বাস্তববাদ আজ মৃত: মহাবিশ্ব বিচ্ছিন্ন খণ্ডাংশের সমষ্টি নয়, বরং এক পরম অ-স্থানীয় সুতোয় গাঁথা অবিচ্ছেদ্য মহাজাগতিক জাল।

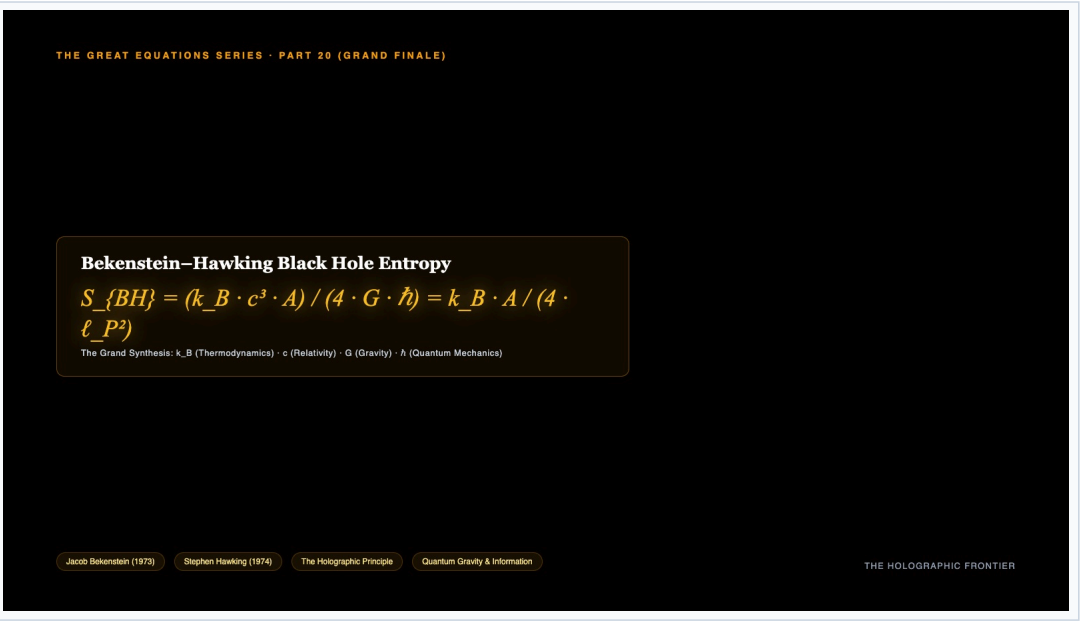
সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "বেলের অসমতা ও কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গলমেন্ট — স্থানীয় বাস্তববাদের অবসান"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ১৯।
https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-19-bells-inequality-quantum-entanglement-bn/

শাকিল মাহমুদ মনোগ্রাফ সিরিজ • বিংশ খণ্ড

বেকেনস্টাইন-হকিং এন্ট্রপি — কৃষ্ণগহ্বর ও হলোগ্রাফিক মহাবিশ্ব

বেকেনস্টাইন-হকিং এন্ট্রপি — কৃষ্ণগহ্বর ও হলোগ্রাফিক মহাবিশ্ব

556 শব্দ • November 2, 2026 • ওয়েব সংস্করণ



চিত্র ২০: *চিত্র: বেকেনস্টাইন-হকিং কৃষ্ণগহ্বর এন্ট্রপি সমীকরণ ($S_{text{BH}} = frac{k_B c^3 A}{4Ghbar}$)। মহাবিশ্বের চারটি পরম ধ্রুবকের ($k_B, c, G, hbar$) একমাত্র মহামিলন—কৃষ্ণগহ্বরের দিগন্তের ক্ষেত্রফল ও হলোগ্রাফিক মহাবিশ্বের চাবিকাঠি।*

১৯৭০-এর দশকের শুরুতে প্রিন্সটনের প্রখ্যাত পদার্থবিজ্ঞানী জন আর্কিবল্ড হুইলার তার তরুণ পিএইচডি শিক্ষার্থী জ্যাকব বেকেনস্টাইনকে এক ধূর্ত ধাঁধায় ফেলেন: *"আমি যদি এক কাপ গরম চা একটি কৃষ্ণগহ্বরে ফেলে দিই, তবে চায়ের সমস্ত এন্ট্রপি মহাবিশ্ব থেকে নিশ্চিহ্ন হয়ে যায়। আমি কি তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রকে সফলভাবে পরাজিত করেছি?"* বেকেনস্টাইন এক সাহসী প্রস্তাব দিলেন: কৃষ্ণগহ্বরের নিজস্ব এন্ট্রপি রয়েছে, যা তার ঘটনা দিগন্তের ক্ষেত্রফলের (Area) সমানুপাতিক। স্টিফেন হকিং এই প্রস্তাব শুনে ক্ষুব্ধ হয়েছিলেন: কৃষ্ণগহ্বরের কোনো এন্ট্রপি থাকতে পারে না, কারণ যার এন্ট্রপি আছে তার তাপমাত্রা থাকবে, আর তাপমাত্রা থাকলে সে বিকিরণ নির্গমন করবে—যা কৃষ্ণগহ্বরের সংজ্ঞারই পরিপন্থী। বেকেনস্টাইনকে ভুল প্রমাণ করার উদ্দেশ্যে ১৯৭৪ সালে হকিং কৃষ্ণগহ্বরের বাঁকা স্থান-কালে কোয়ান্টাম ফিল্ড থিওরির হিসাব কষতে বসেন। নিজের চরম বিস্ময় প্রকাশ করে হকিং দেখলেন বেকেনস্টাইনই সঠিক ছিলেন—কৃষ্ণগহ্বর থেকে সত্যিই কণার তাপীয় বিকিরণ বের হয়! সেই অপার্থিব আবিষ্কারের মধ্য দিয়ে তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞানের ইতিহাসের সর্বশ্রেষ্ঠ সমীকরণ জন্ম নেয়: **বেকেনস্টাইন-হকিং কৃষ্ণগহ্বর এন্ট্রপি সমীকরণ (The Bekenstein-Hawking Entropy Formula)**।

১. সমীকরণের পরিচয়: মহাবিশ্বের চার পরম স্তম্ভের একমাত্র মহামিলন

দিগন্ত ক্ষেত্রফল A-বিশিষ্ট একটি কৃষ্ণগহ্বরের বেকেনস্টাইন-হকিং এন্ট্রপি হলো:

$$S_{textBH} = frac{k_B c^3 A}{4Ghbar} = frac{k_B A}{4ell_P^2}$$

গভীর বিস্ময়ে এই সমীকরণের ধ্রুবকগুলোর দিকে তাকান। মানব ইতিহাসের এটিই **একমাত্র সমীকরণ** যেখানে পদার্থবিজ্ঞানের চারটি মূল স্তম্ভ একত্রিত হয়েছে:

- k_B **(বোলৎজমান ধ্রুবক): তাপগতিবিদ্যা** ও এন্ট্রপির প্রতীক (১.৩৮১$times$১০$^{-২৩}$$text$জুল/কেলভিন)।
- c **(আলোর বেগ):** আইনস্টাইনের **বিশেষ আপেক্ষিকতার** প্রতীক (২.৯৯৮$times$১০^{৮}$text$মি/সে)।
- G **(মহাকর্ষীয় ধ্রুবক):** নিউটন ও আইনস্টাইনের **সাধারণ আপেক্ষিকতা** ও স্থান-কালের বক্রতার প্রতীক (৬.৬৭৪$times$১০$^{-১১}$$text$নিউটন$cdot$$text$মি^{২}/$text$কেজি^{২})।
- $hbar$ **(কাট প্ল্যাঙ্ক ধ্রুবক): কোয়ান্টাম বলবিদ্যার** মৌলিক প্রতীক (১.০৫৫$times$১০$^{-৩৪}$$text$জুল$cdot$$text$সে)।
- $ell_P = sqrt{frac{Ghbar}{c^3}} approx১.৬১৬times১০^{-৩৫}$$text$মিটার **(প্ল্যাঙ্ক দৈর্ঘ্য):** স্থান-কালের ক্ষুদ্রতম পিক্সেল। কৃষ্ণগহ্বরের দিগন্তে প্রতি ৪টি প্ল্যাঙ্ক ক্ষেত্রফলের ($Delta A = 4ell_P^2$) মধ্যে ঠিক ১ বিট তথ্য সংরক্ষিত থাকে।

Shakil Mahmud • Research Monograph

২. হকিং বিকিরণ ও ১/৪ গুণকের রহস্য উন্মোচন

বেকেনস্টাইন কেবল ক্ষেত্রফলের সমানুপাতিক সম্পর্ক দেখিয়েছিলেন ($SproptoA$), কিন্তু ধ্রুবক নির্ণয় করতে পারেননি। হকিং বাঁকা স্থান-কালে কোয়ান্টাম শূন্যতার ভার্চুয়াল কণা-জোড়ার রূপরেখা তৈরি করেন:

- দিগন্তের সীমানায় ভার্চুয়াল কণা ও প্রতি-কণা জোড়া সৃষ্টি হলে একটি কণা ঋণাত্মক শক্তিতে কৃষ্ণগহ্বরে নিপতিত হয় (dM < 0)।
- অন্য কণাটি মহাকাশে ধনাত্মক শক্তিতে মুক্ত হয়ে পালিয়ে আসে, যা দূরবর্তী পর্যবেক্ষকের কাছে **হকিং বিকিরণ (Hawking Radiation)** হিসেবে ধরা দেয়।

হকিং তাপমাত্রা $T_H = frachbarc^38piGMk_B$। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র $dE = T_HdS$ এবং শোয়ার্জশিল্ড ক্ষেত্রফল $A = 16pi(GM/c^2)^2$ ব্যবহার করে ইন্টিগ্রেশন করলে নিখুঁতভাবে ১/৪ গুণকটি নির্ধারিত হয়:

$$S_{textBH} = frack_Bc^3A4Ghbar$$

৩. হলোগ্রাফিক নীতি ও মহাবিশ্বের ভবিষ্যৎ

মহাবিশ্বের প্রতিটি বস্তুর এন্ট্রপি তার ত্রি-মাত্রিক আয়তনের (V) সমানুপাতিক। কিন্তু কৃষ্ণগহ্বরের এন্ট্রপি আয়তনের বদলে তার দ্বি-মাত্রিক বহিস্থ ক্ষেত্রফলের (A) সমানুপাতিক কেন? ১৯৯৩ সালে গেরার্ড ‘টি হুফ্ট এবং লিওনার্ড সাসকাইন্ড যুগান্তকারী **হলোগ্রাফিক নীতি (Holographic Principle)** প্রস্তাব করেন: আমাদের এই ত্রি-মাত্রিক মহাবিশ্ব—তার গ্যালাক্সি, গ্রহ ও মানুষ—মূলত মহাবিশ্বের সীমানায় থাকা একটি দ্বি-মাত্রিক দিগন্তের ওপর খোদাই করা তথ্যের হলোগ্রাফিক প্রজেকশন মাত্র। এটিই আজকের কোয়ান্টাম মহাকর্ষের (Quantum Gravity) সবচেয়ে উজ্জ্বল আলোকবর্তিকা।

৪. সমাপ্তি: মহাজাগতিক সমীকরণমালার মহাকাব্য

আমরা মানবজাতির আড়াই হাজার বছরের বুদ্ধিবৃত্তিক অগ্রযাত্রার পথ পাড়ি দিয়েছি—পিথাগোরাসের ত্রিভুজ ($a^2 + b^2 = c^2$) থেকে শুরু করে ক্যালকুলাসের ভিত্তি, নিউটনের মহাকর্ষ, অয়লারের সমীকরণ, গাউসীয় বেল কার্ভ, দালঁবেরের তরঙ্গ, ফুরিয়ারের বর্ণালী, নেভিয়ার-স্টোকসের টার্বুলেন্স, ম্যাক্সওয়েলের আলো, বোলৎজমানের কালের তির, আইনস্টাইনের ভর-শক্তি ও বাঁকা স্থান-কাল, শ্রোডিঙ্গার ও হাইজেনবার্গের কোয়ান্টাম জগৎ, ডিরাকের প্রতিপদার্থ, শ্যাননের তথ্য এন্ট্রপি, টুরিংয়ের যুক্তির সীমা, বিশৃঙ্খলা তত্ত্ব, বেলের কোয়ান্টাম এন্ট্যাঙ্গলমেন্ট এবং সর্বশেষে হকিংয়ের কৃষ্ণগহ্বর দিগন্তের তথ্য ভাণ্ডার। সমীকরণগুলো মানুষের বানানো কোনো কৃত্রিম নিয়ম নয়—এগুলো হলো মহাবিশ্বের নিজস্ব কাব্যভাষা। এই সমীকরণগুলোর মাধ্যমেই মহাবিশ্ব তার চোখ মেলে নিজের সৃষ্টির রহস্য অবলোকন করে।

সাইটেশন: মাহমুদ, শাকিল (2026)। "বেকেনস্টাইন-হকিং এন্ট্রপি — কৃষ্ণগহ্বর ও হলোগ্রাফিক মহাবিশ্ব"। জ্ঞান বদলে দেওয়া সমীকরণসমূহ, খণ্ড ২০। https://shakilmahmud.com/bn/great-equations-part-20-hawking-entropy-holographic-frontier-bn/

আকর গ্রন্থ ও গবেষণা সূত্র

নির্বাচিত গ্রন্থপঞ্জি

এই মনোগ্রাফে আলোচিত তত্ত্ব, গাণিতিক প্রতিপাদন এবং ঐতিহাসিক বিশ্লেষণের ভিত্তি হিসেবে নিম্নলিখিত আকর গ্রন্থ ও প্রাথমিক গবেষণাপত্রসমূহ ব্যবহৃত হয়েছে:

Stewart, Ian (2012). *In Pursuit of the Unknown: 17 Equations That Changed the World*. Basic Books, New York.

Euler, Leonhard (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. Marcum-Michaelem Bousquet, Lausanne.

Newton, Isaac (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society of London.

Maxwell, James Clerk (1865). *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Philosophical Transactions of the Royal Society, 155: 459–512.

Einstein, Albert (1905). *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?*. Annalen der Physik, 18: 639–641.

Einstein, Albert (1915). *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften: 844–847.

Schrödinger, Erwin (1926). *Quantisierung als Eigenwertproblem*. Annalen der Physik, 79: 361–376.

Shannon, Claude E. (1948). *A Mathematical Theory of Communication*. Bell System Technical Journal, 27(3): 379–423.

Turing, Alan M. (1936). *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. Proceedings of the London Mathematical Society, 42: 230–265.

Hawking, Stephen W. (1975). *Particle Creation by Black Holes*. Communications in Mathematical Physics, 43(3): 199–220.

Feynman, Richard P., Leighton, R. B., & Sands, M. (1964). *The Feynman Lectures on Physics (Vols. I–III)*. Addison-Wesley, Reading, MA.

Penrose, Roger (2004). *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Jonathan Cape, London.

Shakil Mahmud • Research Monograph

লেখক পরিচিতি

লেখক পরিচিতি

Shakil Mahmud

গবেষক, লেখক ও সফটওয়্যার প্রকৌশলী

শাকিল মাহমুদ একজন স্বাধীন গবেষক, লেখক ও সফটওয়্যার প্রকৌশলী। তাঁর প্রধান আগ্রহের বিষয় হলো তাত্ত্বিক পদার্থবিজ্ঞান, গণিতের ইতিহাস, আধুনিক ম্যাক্রোঅর্থনীতি, কম্পিউটিংয়ের বিবর্তন এবং স্থান-কালের দার্শনিক তাৎপর্য। তিনি জটিল দার্শনিক ও বৈজ্ঞানিক ধারণাকে গভীর ও সুললিত ভাষায় উপস্থাপন করতে পছন্দ করেন। তাঁর সার্বিক কাজ পাওয়া যাবে তাঁর ব্যক্তিগত গবেষণা পোর্টাল **shakilmahmud.com** এ।

COLOPHON

Typeset in EB Garamond (English) and Kohinoor Bangla / Noto Serif Bengali (Bengali).
Mathematical typesetting generated with Donald Knuth's TeX algorithms and KaTeX.
Published digitally as a monolithic research monograph by Shakil Mahmud Editorial Series.
Dhaka & Singapore • 2026 • https://shakilmahmud.com